

BŁĘDY OBLICZEŃ. ALGEBRA MACIERZY.

Zadanie 1. Odległość trasy samochodowej z Krakowa do Warszawy wynosi 293.6 km, a po zaokrągleniu do setek kilometrów 300 km. Ile wynosi błąd bezwzględny i względny tego zaokrąglenia?

Zadanie 2. Wiedząc, że wierzchołek Świnicy mierzy w przybliżeniu 2300 m n.p.m z niedomiarem, a błąd względny pomiaru wynosi 0.0868%, wyznacz rzeczywistą wartość wierzchołka.

Zadanie 3. Oblicz wyznaczniki macierzy **A** i **B** oraz ich macierze odwrotne:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Określ normy: sumy kolumn, sumy wierszy i euklidesową.

UKŁADY RÓWANAŃ LINIOWYCH

Zadanie 4.

a) Rozwiąż układ równań metodą Gaussa:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{cases}$$

b) Jak wygląda rozwiązanie metodą Gaussa-Jordana?

Zadanie 5. Wyznacz macierz odwrotną do danej metodą Gaussa-Jordana:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6. Rozwiąż układ równań metodą Choleskiego:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7. Dla podanego układu równań:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= 54 \\ 4x_1 - 10x_2 + 20x_3 &= 20 \end{cases}$$

wektor rozwiązania ma postać $\mathbf{x}_{\text{dokl}} = [5, 4, 2]^T$. Przyjmij wektor startowy $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

- Wykonaj 3 kroki iteracji metodą Jacobiego oraz sprawdź tempo zbieżności (norma różnicy wektorów kolejnych przybliżonych rozwiązań).
 - Powtórz obliczenia dla metody Gaussa-Seidla (także 3 kroki) sprawdzając residuum dla kolejnych rozwiązań.
-

UKŁADY RÓWANAŃ POD- I NADOKREŚLONYCH

Zadanie 8. Rozwiąż poniższy układ równań i podaj graficzną interpretację rozwiązania:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Zadanie 9. Dany jest układ równań:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + y &= -3 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

- Sprawdź czy powyższy układ równań ma rozwiązanie ścisłe?
 - Wyznacz pseudorozwiązanie MNK i podaj graficzną interpretację rozwiązania.
-

RÓWNANIA NIELINIOWE

Zadanie 10. Rozwiąż równanie $x^2 - 1.8x - 8.19 = 0$:

- metodą bisekcji przyjmując przedział izolacji $[3.7, 4.2]$,
- metodą stycznych przyjmując punkt startowy $x_0 = 3.0$,
- metodą iteracji prostej z relaksacją przyjmując $x_0 = 4.0$,
- zmodyfikowaną metodą Newtona-Raphsona przyjmując $x_0 = 6.0$.

Błąd dopuszczalny dla tempa zbieżności wynosi $\Delta_x = |x_{k+1} - x_k| = 0.05$.

Zadanie 11. Rozwiąż równanie nieliniowe $-2x^3 + 4x^2 - 10x + 2 = 0$ przyjmując przedział izolacji $[0, 1]$ oraz błąd dla residuum $\Delta_f = 0.01$:

a) metodą regula falsi,

b) metodą siecznych.

INTERPOLACJA I APROKSYMACJA

Zadanie 12. Jaką postać ma bazowy wielomian Lagrange'a L_1^3 dla danych z tabeli:

x	1	2	4	6
y	7	5	2	4

Wybierz właściwą odpowiedź na podstawie uzasadnienia.

a) $\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-6)}$

b) $\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(7-1)(2-4)(4-6)}$

c) $\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-4)(2-6)}$

Zadanie 13. Stosując interpolację za pomocą wielomianu Lagrange'a stopnia trzeciego wyznacz wartość funkcji dla $x=1.5$:

x	1	2	3	4	5	6
y	0	2	0	0	3	0

Wskazówka: Wybierz z tabeli odpowiednie węzły interpolacji.

Zadanie 14. Stosując interpolację Hermita odpowiedniego stopnia wyznacz $\varphi(1.0)$ dla poniższych danych:

i	x_i	f_i	f'_i
0	-1.0	-1.0	5.0
1	2.0	5.0	8.0

Zadanie 15. Dokonaj aproksymacji optymalnej w sensie MNK dla danych z tabeli, używając wielomianu uogólnionego w postaci $w(x) = A + Bx + Cx^2$.

x	-4	-2	0	2	4
y	3	7	2	4	5

Zadanie 16. Dokonaj aproksymacji optymalnej w sensie MNK dla danych z tabeli, używając wielomianu uogólnionego w postaci $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	2	-1	0	1

PROBLEM WŁASNY

Zadanie 17. Zastosuj twierdzenie Gerszgorina w celu wyznaczenia zakresu spektrum poniższych macierzy. Wykonaj odpowiednią interpretację graficzną.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 18. Oblicz, stosując metodę potęgową, największą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny dla danej macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

przyjmując wektor startowy $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ i dokładność $\epsilon = 0.1$.

Zadanie 19. Znajdź przybliżoną wartość własną najbliższą wartości 5 dla danej macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Wykonaj 2 kroki iteracyjne przyjmując wektor startowy $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 1]^T$.

RÓŻNICZKOWANIE I CAŁKOWANIE

Zadanie 20. Dana jest funkcja: $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + 3\sin(x)$.

Wyznacz pochodną pierwszego i drugiego rzędu w 11 równoodległych punktach dla przedziału $[a, b] = [-5, 5]$. Wyniki porównaj z rozwiązaniem ścisłym.

Zadanie 21. Wyprowadź wzór różnicowy dla schematu jak na rysunku do obliczenia pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie i .

Powtórz te obliczenia dla punktów $i + 1$ oraz $i + 2$.



Zadanie 22. Oblicz całki (bez podziału obszaru na podprzedziały oraz dzieląc go na 3 równe podprzedziały):

$$I = \int_0^6 (x^2 - 2x + 3) dx$$

- a) metodą prostokątów lewych, środkowych i prawych,
- b) metodą trapezów,
- c) metodą Simpsona.

Naszkicuj interpretację graficzną dla tych rozwiązań. Jaki jest optymalny podział obszaru całkowania dla metody Simpsona?

Zadanie 23. Wyznacz wartość poniższej całki stosując trójpunktową kwadraturę Gaussa.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + x - 5) dx$$

Przyjmij 1 podprzedział. Powtórz obliczenia dla kwadratury dwupunktowej. Dlaczego otrzymane wyniki są zgodne z rozwiązaniem analitycznym?

PROBLEM POCZĄTKOWY I BRZEGOWY

Zadanie 24. Oblicz $x(t = 1.2)$ dla poniższego problemu początkowego:

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2, \quad x(t = 1.0) = 2.0, \quad \text{gdzie } h = 0.1$$

- a) metodą Eulera (klasyczną i polepszoną),
- b) metodą Runge-Kutty II,
- c) metodą England I.

Zadanie 25. Rozwiąż metodą różnic skończonych poniższy problem brzegowy:

$$y''(x) + 2y(x) - 3x = 0, \quad x \in [-1, 2], \quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 2, \quad h = 1.$$

Zadanie 26. Stosując MRS dla belki jak na rysunku wyznacz wartości funkcji ugięcia $v(x)$ w węzłach. Wykorzystaj odpowiednie schematy różnicowe dla warunków brzegowych oraz przemieszczeniowego równania różniczkowego czwartego rzędu. Przyjmij $EJ = 10000 \text{ kNm}^2$ oraz $h = 1.0 \text{ m}$.

