Ewa Pabisek
Adam Wosatko
Piotr Pluciński

Matematyka stosowana i metody numeryczne

Konspekt z wykładów

5 Algebraiczny problem własny

5.1 Wiadomości wstępne

Standardowy problem własny ma postać:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \quad \text{lub} \quad (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Poszukujemy rozwiązań jednorodnego układu liniowych równań algebraicznych, w którym macierz współczynników $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$ zależy od jednego parametru λ.

Problem własny ma nietrywialne rozwiązanie $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tylko wtedy, gdy:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0$$

Rozwiązaniem problemu własnego jest zatem cały zbiór n par własnych:

$$(\lambda_i,\ \mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

uporządkowany przez relacje $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Wartości $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ nazywamy wartościami własnymi rowiązywanego problemu. Każdej wartości własnej odpowiada wektor własny $\mathbf{x}_i$.

Definicja.
Ilorazem Rayleigha nazywamy wyrażenie powstające na podstawie równości $\mathbf{A}\,\mathbf{x}_i = \lambda_i\,\mathbf{x}_i$ pomnożonej lewostronnie przez $\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i \rightarrow \lambda_i = \frac{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i}$$

Twierdzenie.
Jeżeli wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$ są liczby λ_i to wartościami własnymi macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$ są liczby λ_i^{-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Twierdzenie.
Jeżeli do macierzy $\mathbf{A}$ dodamy dowolną macierz skalarną $\mu\mathbf{I}$ to $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}+\mu\mathbf{I}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{A})+\mu$. Widmo macierzy $\mathbf{A} + \mu\mathbf{I}$ jest więc zbiorem liczb:

$$\lambda_1 + \mu,\ \lambda_2 + \mu, \ldots, \lambda_n + \mu.$$

Twierdzenie (Gerszgorina) o lokalizacji wartości własnych.

Jeśli λ jest wartością własną $\mathbf{A}$, to

$$a_i - R_i \leq \lambda \leq a_i + R_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

gdzie

$$a_i = A_{ii} \qquad R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |\, A_{ij} \,|$$

5.2 Metoda potęgowa

Metoda ta służy do wyznaczania pojedynczej wartości własnej, o największym module, macierzy $\mathbf{A}$ i odpowiadającego jej wektora własnego $\mathbf{x}$.

Algorytm metody potęgowej:

1. Normalizacja danego wektora startowego $\mathbf{x}^{(0)} \to \mathbf{u}^{(0)}$.
2. Krok potęgowy: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{u}^{(0)}$.
3. Iloraz Rayleigha: $\lambda = (\mathbf{u}^{(0)})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}$.
4. Normalizacja obliczonego wektora $\mathbf{x}$.
5. Sprawdzenie kryterium zatrzymania pętli: tempo zbieżności dla wartości własnej i znormalizowanego wektora własnego.
6. Jeśli żądana dokładność nie jest spełniona, to powrót do wyznaczenia kroku potęgowego (punkt 2).

Przykład: Znaleźć największą wartość własną $\lambda_{\max}$ oraz odpowiadający jej wektor własny $\mathbf{x}$ dla macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 & 0 \\ 1.0 & 4.0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad \text{przyjmując wektor startowy:} \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

it	λ	u_1	u_2	u_3
0	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
1	1.50000	0.83205	0.55470	0.00000
2	3.19231	0.50718	0.85830	0.07803
3	4.28234	0.37342	0.91779	0.13497
4	4.42428	0.33362	0.92824	0.16452
...	...	...	...	...
14	4.44224	0.31592	0.92951	0.19030

5.3 Metoda iteracji odwrotnej

Metoda ta służy do obliczenia najmniejszej co do modułu wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego.

$$(\mathbf{A}^0 - \lambda^0\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

gdzie:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{-1} \qquad \lambda^0 = 1/\lambda.$$

Dzięki temu taką wartość własną można obliczyć metodą potęgową podstawiając macierz $\mathbf{A}^{-1}$ zamiast macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład: Znaleźć najmniejszą wartość własną $\lambda_{\min}$ oraz odpowiadający jej wektor własny $\mathbf{x}$ dla macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 & 0 \\ 1.0 & 4.0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad \text{przyjmując wektor startowy:} \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.805195 & -0.207792 & 0.051948 \\ -0.207792 & 0.311688 & -0.077922 \\ 0.051948 & -0.077922 & 0.519481 \end{bmatrix}$$

it	λ	u_1	u_2	u_3
0	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
1	1.24194	0.96639	−0.24939	0.06235
2	1.13349	0.94044	−0.31988	0.11516
3	1.11992	0.92837	−0.34026	0.14949
4	1.11695	0.92235	−0.34685	0.17018
...	...	...	...	...
18	1.11563	0.91480	−0.35161	0.19878

5.4 Przesuwanie widma

Metodę iteracji odwrotnej można uogólnić na poszukiwanie wartości własnej najbliższej żądanej wartości μ. Jeśli macierz $\mathbf{A}$ ma wartość własną λ_i, to macierz $\mathbf{A}^\star = \mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$ ma wartość własną $\lambda_i^\star = \lambda_i - \mu$, a macierz $\mathbf{A}^{\star 0} = (\mathbf{A}^\star)^{-1}$ ma wartość własną $\lambda^{\star 0} = \frac{1}{\lambda_i^\star} = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$.

Przykład: Znaleźć wartości własne dla macierzy $\mathbf{A}$ z poprzedniego przykładu dla trzech różnych wartości $\mu = 0.0,\ 2.0$ i 4.0.

μ	it	λ	u_1	u_2	u_3
0.0	18	1.11563	0.91480	−0.35161	0.19878
2.0	7	1.94213	−0.25169	−0.11128	0.96139
4.0	9	4.44224	0.31592	0.92951	0.19030

5.5 Uogólniony problem własny

Dla macierzy symetrycznych i dodatnio określonych można przekształcić odpowiedni uogólniony problem własny w odpowiedni problem standardowy (prosty). W tym celu stosujemy dekompozycję Choleskiego.

Uogólniony problem własny:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$$

sprowadzony do postaci standardowej:

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

gdzie:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{L}^{-1})^{\mathrm{T}}, \qquad \tilde{\lambda} = 1/\lambda, \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}.$$

Wartość własną i wektor własny oblicza się ze wzorów:

$$\lambda = 1/\tilde{\lambda}, \qquad \mathbf{x} = (\mathbf{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\tilde{\mathbf{x}}.$$

Przykład: Dany jest uogólniony problem własny:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprowadzić ten problem do postaci standardowej.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{L}^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2.0000e{+}00 & -4.4160e{-}16 \\ -5.1279e{-}16 & 5.0000e{-}01 \end{bmatrix}$$