Sformułowanie silne - model lokalny

$$Ay''(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

+ (przykładowe) warunki brzegowe

- $y(x_a) = \widehat{a}$ – podstawowy warunek brzegowy (Dirichleta)
- $y'(x_b) = \widehat{b}$ – naturalny warunek brzegowy (Neumanna)

Słabe sformułowanie - model globalny ($\forall w \neq 0$)

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)\left(Ay^{h''}(x) + C(x)y^h(x) - D(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)Ay^{h''}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$w(x)Ay^{h'}(x)\Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Ay^{h'}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$w(x_b)A\overset{\widehat{b}}{\boxed{y^{h'}(x_b)}} - w(x_a)Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Ay^{h'}(x)\mathrm{d}x + y^{h'}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\boxed{w(x_b)A\widehat{b}}\ \boxed{-w(x_a)Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Ay^{h'}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)y^h(x)\mathrm{d}x}\ \boxed{-\int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)\mathrm{d}x} = 0$$

$$\boxed{L(y^h, w)}\ \boxed{-l(w)} = 0$$

+ podstawowy warunek brzegowy

- $y(x_a) = \widehat{a}$

Estymator błędu

$$e^e(x^e) = |y^e_{h,p}(x^e) - y^e_{por}(x^e)|$$

gdzie: e – element, $y^e_{h,p}$ – rozwiązanie MES, h – moduł siatki, p – rząd aproksymacji
y^e_{por} – rozwiązanie ścisłe lub odniesienia.

Wskaźnik (indykator błędu)

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{|l|}\sum_e L(e,e)}$$

Liniowe funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e(x^e) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$$

Hierarchiczne kwadratowe funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e(x^e) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} & x^e(x^e - l^e) \end{bmatrix}$$

Hierarchiczne kubiczne funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e(x^e) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} & x^e(x^e - l^e) & x^e(x^e - l^e)(2x^e - l^e) \end{bmatrix}$$

Własności funkcji kształtu 2D

$$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0 \qquad \text{dla } i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad \text{gdzie } n - \text{liczba węzłów}$$

Funkcje bazowe w ES trójwęzłowym $\mathbf{\Phi} = [1,\ x,\ y]$ a w czterowęzłowym $\mathbf{\Phi} = [1,\ x,\ y,\ xy]$

Przemieszczenia PSO

$$\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y)\bar{\mathbf{d}}^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{u}^e(x, y) = \{u^e(x, y), v^e(x, y)\}, \quad \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \cdots & N_n^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \cdots & 0 & N_n^e \end{bmatrix}$$

Odkształcenia PSO: $\varepsilon_z = 0$

$$\mathbf{e}^e(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{B}^e(x, y)\bar{\mathbf{d}}^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{B}^e(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{N}^e(x, y)$$

$$\mathbf{e}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e(x, y) \\ \varepsilon_y^e(x, y) \\ \gamma_{xy}^e(x, y) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Naprężenia PSO: $\sigma_z^e = \nu(\sigma_x^e + \sigma_y^e)$

$$\mathbf{s}^e(x, y) = \mathbf{D}\mathbf{e}^e(x, y) \qquad \text{gdzie } \mathbf{s}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x^e(x, y) \\ \sigma_y^e(x, y) \\ \tau_{xy}^e(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności i wektor sił brzegowych (równoważniki obciążenia) PSO

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}A^e, \qquad \bar{\mathbf{p}}_{\mathrm{b}}^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{t}^e\mathrm{d}\Gamma^e \qquad \text{gdzie } \mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} t_x^e \\ t_y^e \end{bmatrix}$$

Rozwinięcie w szereg Taylora

- dla 1D: $u_j = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \frac{1}{6}h^3u_i''' + \ldots + \frac{1}{n!}h^n u_i^{(n)} + \ldots$ gdzie $h = x_j - x_i$
- dla 2D: $u_{lm} = u_{ij} + h\dfrac{\partial u_{ij}}{\partial x} + k\dfrac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \dfrac{1}{2}h^2\dfrac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + hk\dfrac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{2}k^2\dfrac{\partial^2 u_{ij}}{\partial y^2} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}h + \dfrac{\partial}{\partial y}k\right)^n u_{ij} + \ldots$ gdzie $h = x_l - x_i, k = y_m - y_j$

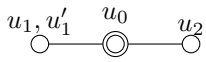
Wzory różnicowe - klasyczny MRS

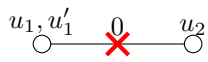
- Pierwsza pochodna centralna $\left\{ \text{-1} \overset{h}{\text{—}} \text{0} \overset{h}{\text{—}} \text{1} \right\} \cdot \dfrac{1}{2h}$
- Druga pochodna $\left\{ \text{1} \overset{h}{\text{—}} \text{-2} \overset{h}{\text{—}} \text{1} \right\} \cdot \dfrac{1}{h^2}$
- Laplasjan $\left\{ \begin{array}{ccccc} & & \text{1} & & \\ & & h & & \\ \text{1} & h & \text{-4} & h & \text{1} \\ & & h & & \\ & & \text{1} & & \end{array} \right\} \cdot \dfrac{1}{h^2}$

Aproksymacja MWLS 1D

- Aproksymacja lokalna

$$J = \sum_{s=0}^{m} \sum_{j=1}^{n_s} \left[\left(\overbrace{\sum_{i=s}^{p} \frac{h_j^{i-s}}{(i-s)!} u_0^{(i)}}^{\bar{u}_j^{(s)}} - u_j^{(s)} \right)^2 \left(\frac{1}{h_j^{1+p-s}} \right)^2 \right]$$

  gdzie
  - p – stopień aproksymacji
  - j – numer węzła dla którego zastosowano rozwinięcie w szereg Taylora
  - s – typ uogólnionego stopnia swobody, np. $s = 0 \Rightarrow u_j, s = 1 \Rightarrow u'_i$
  - m – liczba typów uogólnionych stopni swobody, np. $m = 0 \Rightarrow u_j$; $m = 1 \Rightarrow u_j, u'_j$.
  - $n_s = [n_0, n_1, \ldots, n_m]$ – liczba stopni swobody danego typu dla których zastosowano rozwinięcie w szereg Taylora, np. 

lub 

$n_0 = 2, n_1 = 1$

- Minimalizacja błędu

$$\frac{\partial J}{\partial u_0^{(t)}} = 0$$

  gdzie: $u_0^{(t)} = \frac{\mathrm{d}^t u}{\mathrm{d}x^t}$ – poszukiwane pochodne t w węźle/punkcie x_0

Macierz sztywności dla elementu ramowego

$$\mathbf{k}^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e$$

Macierz mas dla elementu ramowego

$$\mathbf{m}^e = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 & \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\mu l}{35} & \frac{11\mu l^2}{210} & 0 & \frac{9\mu l}{70} & -\frac{13\mu l^2}{420} \\ 0 & \frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} & 0 & \frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} \\ \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 & \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu l}{70} & \frac{13\mu l^2}{420} & 0 & \frac{13\mu l}{35} & -\frac{11\mu l^2}{210} \\ 0 & -\frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} & 0 & -\frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} \end{bmatrix}^e$$

Macierz transformacji ($c = \cos(\alpha^e)$ i $s = \sin(\alpha^e)$)

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$