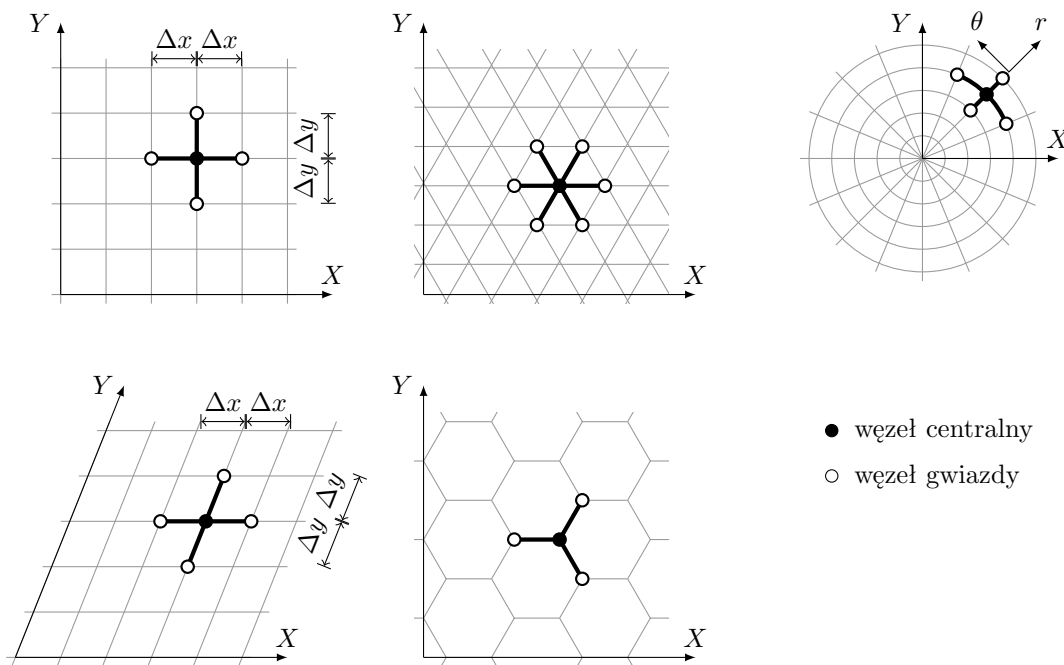


4. Metoda Różnic Skończonych

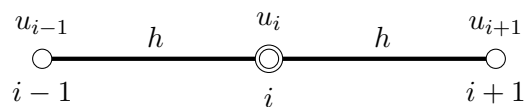
	MRS (lokalna)	MES
Sformułowanie problemu brzegowego	Lokalne $\begin{cases} \nabla^2 u = f \text{ dla } P \in \Omega \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ dla } P \in \partial\Omega \end{cases} \quad u = u(P)$	Wariacyjne $-\int_{\Omega} \nabla v \nabla u d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega$
Generacja siatki	Typ (np. prostokątna, trójkątna) z modulem h	Generatory siatek
Aproksymacja	Generacja wzorów różnicowych dla pochodnych z równania	Interpolacja za pomocą funkcji kształtu
Generacja równań dyskretnych	Kolokacja	Spełnienie równania wariacyjnego w elemencie + agregacja
Całkowanie	Brak	Całkowanie numeryczne - kwadratury Gaussa
Warunki brzegowe	Dodatkowe wzory różnicowe	Modyfikacja układu równań
Macierz układu równań	Na ogół niesymetryczna	Symetryczna pasmowa

4.1. Generowanie gwiazdy

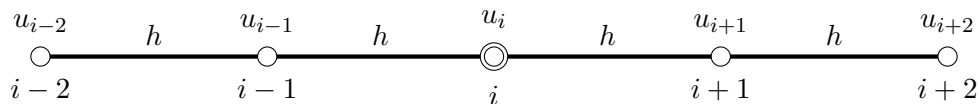


1D

standardowa gwiazda trójwęzłowa

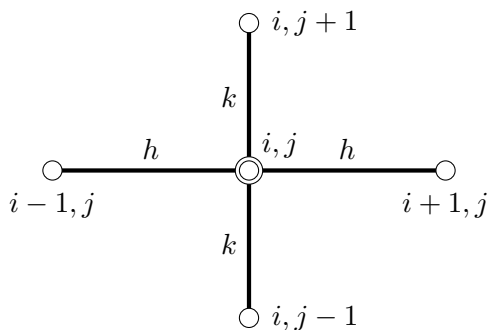


gwiazda pięciowęzłowa

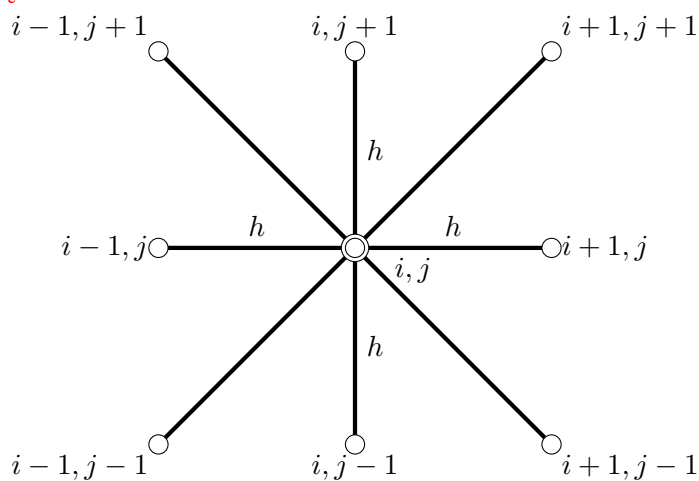


2D

gwiazda pięciowęzłowa



gwiazda dziewięciowęzłowa



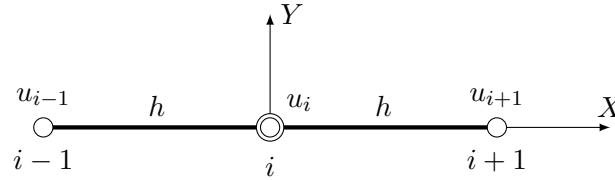
Sposoby generacji wzorów różnicowych

- Interpolacja i różniczkowanie
- Wymuszenie zgodności dla jednomianów
- Metoda współczynników nieoznaczonych („metoda Taylora”)
- Składanie wzorów złożonych ze wzorów prostych

Generowanie gwiazdy różnicowej - Przykłady

- Interpolacja i różniczkowanie – Przykład 1

Standardowa gwiazda trójwęzłowa

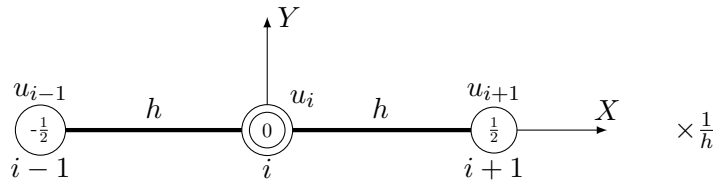


$$u(x) = \frac{(x-0)(x-h)}{(-h-0)(-h-h)}u_{i-1} + \frac{(x+h)(x-h)}{(0+h)(0-h)}u_i + \frac{(x+h)(x-0)}{(h+h)(h-0)}u_{i+1}$$

$$u(x) = \frac{x^2 - xh}{2h^2}u_{i-1} + \frac{h^2 - x^2}{h^2}u_i + \frac{x^2 + hx}{2h^2}u_{i+1}$$

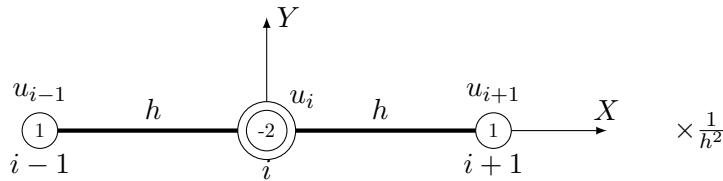
$$u'(x) = \frac{2x-h}{2h^2}u_{i-1} + \frac{-2x}{h^2}u_i + \frac{2x+h}{2h^2}u_{i+1}$$

$$u'_i = u'(0) = \frac{-u_{i-1} + u_{i+1}}{2h}$$



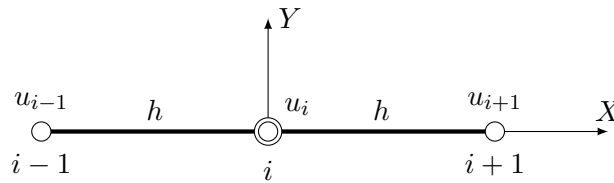
$$u''(x) = \frac{2}{2h^2}u_{i-1} + \frac{-2}{h^2}u_i + \frac{2}{2h^2}u_{i+1}$$

$$u''_i = u''(0) = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$



- Zgodność jednomianów – Przykład 2

Standardowa gwiazda trójwęzłowa



$$u'_i = \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

$$\text{założenie: } u(x) = 1$$

$$u'(0) = \alpha u(-h) + \beta u(0) + \gamma u(h) \implies 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1$$

$$\text{założenie: } u(x) = x$$

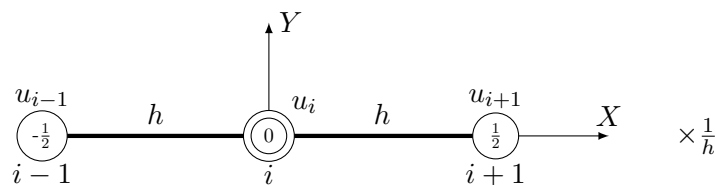
$$u'(0) = \alpha u(-h) + \beta u(0) + \gamma u(h) \implies 1 = \alpha \cdot (-h) + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot h$$

$$\text{założenie: } u(x) = x^2$$

$$u'(0) = \alpha u(-h) + \beta u(0) + \gamma u(h) \implies 2 \cdot 0 = \alpha \cdot h^2 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot h^2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -h\alpha + h\gamma = 1 \\ h^2\alpha + h^2\gamma = 0 \end{cases} \implies \alpha = \frac{-1}{2h}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2h}$$

$$u'_i = \frac{-1}{2h}u_{i-1} + \frac{1}{2h}u_{i+1} = \frac{-u_{i-1} + u_{i+1}}{2h}$$



$$u''_i = \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

$$\text{założenie: } u(x) = 1$$

$$u''(0) = \alpha u(-h) + \beta u(0) + \gamma u(h) \implies 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1$$

$$\text{założenie: } u(x) = x$$

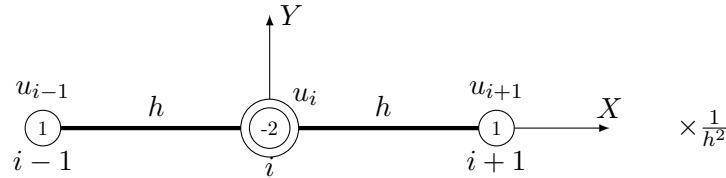
$$u''(0) = \alpha u(-h) + \beta u(0) + \gamma u(h) \implies 0 = \alpha \cdot (-h) + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot h$$

$$\text{założenie: } u(x) = x^2$$

$$u''(0) = \alpha u(-h) + \beta u(0) + \gamma u(h) \implies 2 = \alpha \cdot h^2 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot h^2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -h\alpha + h\gamma = 0 \\ h^2\alpha + h^2\gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{h^2}, \beta = \frac{-2}{h^2}, \gamma = \frac{1}{h^2}$$

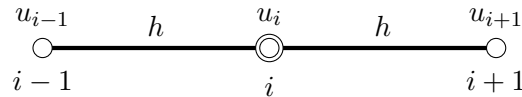
$$u_i'' = \frac{1}{h^2}u_{i-1} - \frac{2}{h^2}u_i + \frac{1}{h^2}u_{i+1} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$



- Metoda współczynników nieoznaczonych – Przykład 3

$$u_j = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \frac{1}{6}h^3u_i''' + \dots + \frac{1}{n!}h^nu_i^{(n)} + \dots \quad \text{gdzie } h = x_j - x_i$$

Standardowa gwiazda trójwęzłowa



$$u_i' = \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

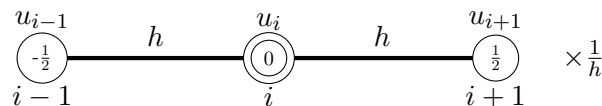
$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \end{cases}$$

$$u_i' = \alpha \left(u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right) + \beta u_i + \gamma \left(u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right)$$

$$u_i' = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(-h\alpha + h\gamma)}_{=1} u_i' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}h^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\gamma \right)}_{=0} u_i''$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -h\alpha + h\gamma = 1 \\ \frac{1}{2}h^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2h}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2h}$$

$$u_i' = \frac{-1}{2h}u_{i-1} + \frac{1}{2h}u_{i+1} = \frac{-u_{i-1} + u_{i+1}}{2h}$$



$$u_i'' = \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

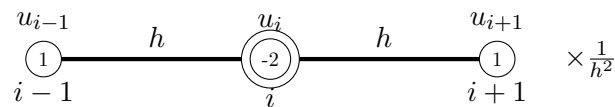
$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \end{cases}$$

$$u_i'' = \alpha \left(u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right) + \beta u_i + \gamma \left(u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right)$$

$$u_i'' = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(-h\alpha + h\gamma)}_{=0} u_i' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}h^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\gamma \right)}_{=1} u_i''$$

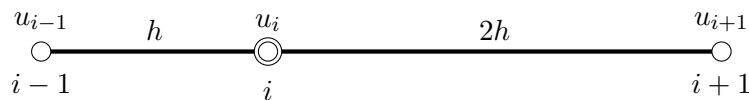
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -h\alpha + h\gamma = 0 \\ \frac{1}{2}h^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\gamma = 1 \end{cases} \implies \alpha = \frac{1}{h^2}, \beta = \frac{-2}{h^2}, \gamma = \frac{1}{h^2}$$

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}u_{i-1} - \frac{2}{h^2}u_i + \frac{1}{h^2}u_{i+1} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$



- Metoda współczynników nieoznaczonych – Przykład 4a

Niestandardowa gwiazda trójwęzłowa



$$u_i' = \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

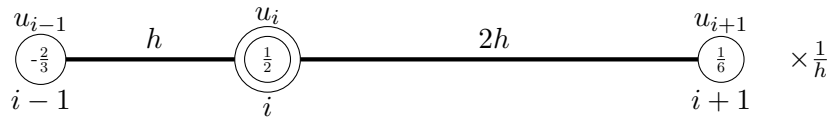
$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2u_i'' + \dots \end{cases}$$

$$u_i' = \alpha \left(u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right) + \beta u_i + \gamma \left(u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2u_i'' \right)$$

$$u_i' = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(-h\alpha + 2h\gamma)}_{=1} u_i' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}h^2\alpha + \frac{1}{2}(2h)^2\gamma \right)}_{=0} u_i''$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -h\alpha + 2h\gamma = 1 \\ \frac{1}{2}h^2\alpha + 2h^2\gamma = 0 \end{cases} \implies \alpha = \frac{-2}{3h}, \beta = \frac{1}{2h}, \gamma = \frac{1}{6h}$$

$$u_i' = \frac{-2}{3h}u_{i-1} + \frac{1}{2h}u_i + \frac{1}{6h}u_{i+1} = \frac{-4u_{i-1} + 3u_i + u_{i+1}}{6h}$$



$$u_i'' = \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

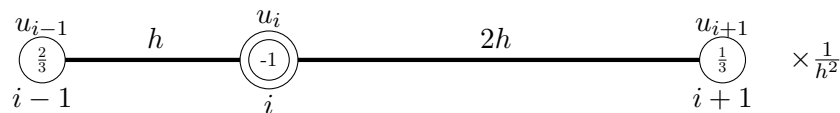
$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2u_i'' + \dots \end{cases}$$

$$u_i'' = \alpha \left(u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right) + \beta u_i + \gamma \left(u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2u_i'' \right)$$

$$u_i'' = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(-h\alpha + 2h\gamma)}_{=0} u_i' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}h^2\alpha + \frac{1}{2}(2h)^2\gamma \right)}_{=1} u_i''$$

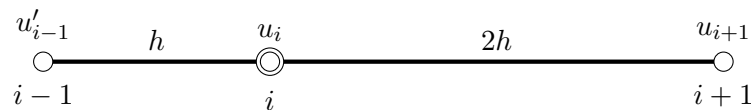
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -h\alpha + 2h\gamma = 0 \\ \frac{1}{2}h^2\alpha + 2h^2\gamma = 1 \end{cases} \implies \alpha = \frac{2}{3h^2}, \beta = \frac{-1}{h^2}, \gamma = \frac{1}{3h^2}$$

$$u_i'' = \frac{2}{3h^2}u_{i-1} - \frac{1}{h^2}u_i + \frac{1}{3h^2}u_{i+1} = \frac{2u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}}{3h^2}$$



- Metoda współczynników nieoznaczonych – Przykład 4b

Niestandardowa gwiazda trójwęzłowa



$$u_i' = \alpha u_{i-1}' + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

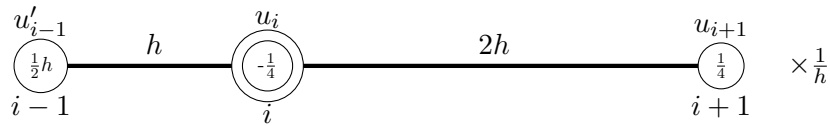
$$\begin{cases} u_{i-1}' = u_i' - hu_i'' + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2u_i'' + \dots \end{cases}$$

$$u_i' = \alpha (u_i' - hu_i'') + \beta u_i + \gamma \left(u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2u_i'' \right)$$

$$u_i' = \underbrace{(\beta + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(\alpha + 2h\gamma)}_{=1} u_i' + \underbrace{\left(-h\alpha + \frac{1}{2}(2h)^2\gamma \right)}_{=0} u_i''$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2h\gamma = 1 \\ -h\alpha + 2h^2\gamma = 0 \end{cases} \implies \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-1}{4h}, \gamma = \frac{1}{4h}$$

$$u'_i = \frac{1}{2}u'_{i-1} - \frac{1}{4h}u_i + \frac{1}{4h}u_{i+1} = \frac{2u'_{i-1}h - u_i + u_{i+1}}{4h}$$



$$u''_i = \alpha u'_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

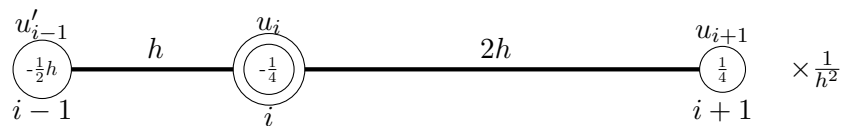
$$\begin{cases} u'_{i-1} = u'_i - hu''_i + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i + \dots \end{cases}$$

$$u''_i = \alpha(u'_i - hu''_i) + \beta u_i + \gamma(u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i)$$

$$u''_i = \underbrace{(\beta + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(\alpha + 2h\gamma)}_{=0} u'_i + \underbrace{\left(-h\alpha + \frac{1}{2}(2h)^2\gamma\right)}_{=1} u''_i$$

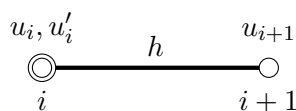
$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2h\gamma = 0 \\ -h\alpha + 2h^2\gamma = 1 \end{cases} \implies \alpha = \frac{-1}{2h}, \beta = \frac{-1}{4h^2}, \gamma = \frac{1}{4h^2}$$

$$u''_i = -\frac{1}{2h}u'_{i-1} - \frac{1}{4h^2}u_i + \frac{1}{4h^2}u_{i+1} = \frac{-2u'_{i-1}h - u_i + u_{i+1}}{4h^2}$$



- Metoda współczynników nieoznaczonych – Przykład 5a

Gwiazda dwuwęzłowa



$$u_i'' = \alpha u_i + \beta u_i' + \gamma u_{i+1}$$

$$\begin{cases} u_i = u_i \\ u_i' = u_i' \\ u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \end{cases}$$

$$u_i'' = \alpha u_i + \beta u_i' + \gamma \left(u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right)$$

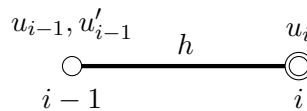
$$u_i'' = \underbrace{(\alpha + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(\beta + h\gamma)}_{=0} u_i' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}h^2\gamma \right)}_{=1} u_i''$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + h\gamma = 0 \\ \frac{1}{2}h^2\gamma = 1 \end{cases} \implies \alpha = \frac{-2}{h^2}, \beta = \frac{-2}{h}, \gamma = \frac{2}{h^2}$$

$$u_i'' = -\frac{2}{h^2}u_i - \frac{2}{h}u_i' + \frac{2}{h^2}u_{i+1} = \frac{-2u_i - 2hu_i' + 2u_{i+1}}{h^2}$$

- Metoda współczynników nieoznaczonych – Przykład 5b

Gwiazda dwuwęzłowa



$$u_i' = \alpha u_{i-1} + \beta u_{i-1}' + \gamma u_i$$

$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + \dots \\ u_{i-1}' = u_i' - hu_i'' + \dots \\ u_i = u_i \end{cases}$$

$$u_i' = \alpha \left(u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' \right) + \beta (u_i' - hu_i'') + \gamma u_i$$

$$u_i' = \underbrace{(\alpha + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(-h\alpha + \beta)}_{=1} u_i' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}h^2\alpha - h\beta \right)}_{=0} u_i''$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -h\alpha + \beta = 1 \\ \frac{1}{2}h^2\alpha - h\beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \frac{-2}{h}, \beta = -1, \gamma = \frac{2}{h}$$

$$u_i' = -\frac{2}{h}u_{i-1} - u_{i-1}' + \frac{2}{h}u_i = \frac{-2u_{i-1} - hu_{i-1}' + 2u_i}{h}$$

$$u_i'' = \alpha u_{i-1} + \beta u_{i-1}' + \gamma u_i$$

$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \dots \\ u'_{i-1} = u'_i - hu''_i + \dots \\ u_i = u_i \end{cases}$$

$$u''_i = \alpha \left(u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i \right) + \beta (u'_i - hu''_i) + \gamma u_i$$

$$u''_i = \underbrace{(\alpha + \gamma)}_{=0} u_i + \underbrace{(-h\alpha + \beta)}_{=0} u'_i + \underbrace{\left(\frac{1}{2}h^2\alpha - h\beta \right)}_{=1} u''_i$$

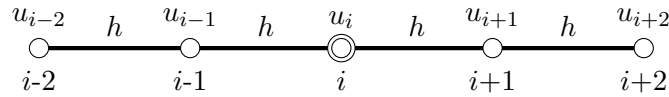
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -h\alpha + \beta = 0 \\ \frac{1}{2}h^2\alpha - h\beta = 1 \end{cases} \implies \alpha = \frac{-2}{h^2}, \beta = \frac{-2}{h}, \gamma = \frac{2}{h^2}$$

$$u''_i = -\frac{2}{h^2}u_{i-1} - \frac{2}{h}u'_{i-1} + \frac{2}{h^2}u_i = \frac{-2u_{i-1} - 2hu'_{i-1} + 2u_i}{h^2}$$

- Metoda współczynników nieoznaczonych – Przykład 6

$$u_j = u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \dots + \frac{1}{n!}h^n u_i^{(n)} + \dots \quad \text{gdzie } h = x_j - x_i$$

Standardowa gwiazda pięciowęzłowa



$$u'_i = \alpha u_{i-2} + \beta u_{i-1} + \gamma u_i + \delta u_{i+1} + \epsilon u_{i+2}$$

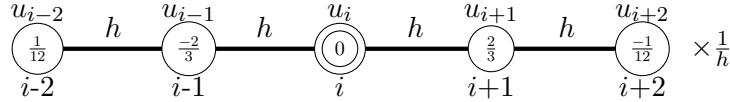
$$\begin{cases} u_{i-2} = u_i - 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i - \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i + \dots \\ u_{i-1} = u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i - \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i + \dots \\ u_{i+2} = u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i + \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i + \dots \end{cases}$$

$$u'_i = \alpha \left(u_i - 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i - \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i \right) + \beta \left(u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i - \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i \right) + \\ + \gamma (u_i) + \delta \left(u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i \right) + \epsilon \left(u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i + \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i \right)$$

$$u'_i = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)}_{=0} u_i + \underbrace{(-2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon)}_{=1} u'_i + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(2h)^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\beta + \frac{1}{2}h^2\delta + \frac{1}{2}(2h)^2\epsilon \right)}_{=0} u''_i + \\ + \underbrace{\left(-\frac{1}{6}(2h)^3\alpha - \frac{1}{6}h^3\beta + \frac{1}{6}h^3\delta + \frac{1}{6}(2h)^3\epsilon \right)}_{=0} u'''_i + \underbrace{\left(\frac{1}{24}(2h)^4\alpha + \frac{1}{24}h^4\beta + \frac{1}{24}h^4\delta + \frac{1}{24}(2h)^4\epsilon \right)}_{=0} u''''_i$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon = 1 \\ \frac{1}{2}(2h)^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\beta + \frac{1}{2}h^2\delta + \frac{1}{2}(2h)^2\epsilon = 0 \\ -\frac{1}{6}(2h)^3\alpha - \frac{1}{6}h^3\beta + \frac{1}{6}h^3\delta + \frac{1}{6}(2h)^3\epsilon = 0 \\ \frac{1}{24}(2h)^4\alpha + \frac{1}{24}h^4\beta + \frac{1}{24}h^4\delta + \frac{1}{24}(2h)^4\epsilon = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{12h} \\ \beta = \frac{-2}{3h} \\ \gamma = 0 \\ \delta = \frac{2}{3h} \\ \epsilon = \frac{-1}{12h} \end{cases}$$

$$u'_i = \frac{1}{12h}u_{i-2} - \frac{2}{3h}u_{i-1} + \frac{2}{3h}u_{i+1} - \frac{1}{12h}u_{i+2} = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12h}$$



$$u''_i = \alpha u_{i-2} + \beta u_{i-1} + \gamma u_i + \delta u_{i+1} + \epsilon u_{i+2}$$

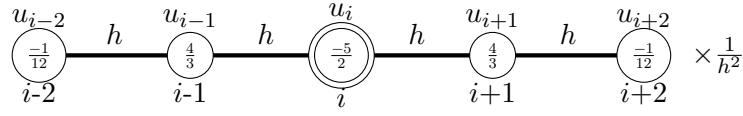
$$\begin{cases} u_{i-2} = u_i - 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i - \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i + \dots \\ u_{i-1} = u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i - \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i + \dots \\ u_{i+2} = u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i + \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i + \dots \end{cases}$$

$$u''_i = \alpha \left(u_i - 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i - \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i \right) + \beta \left(u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i - \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i \right) + \gamma (u_i) + \delta \left(u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i \right) + \epsilon \left(u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i + \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i \right)$$

$$u''_i = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)}_{=0} u_i + \underbrace{(-2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon)}_{=0} u'_i + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(2h)^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\beta + \frac{1}{2}h^2\delta + \frac{1}{2}(2h)^2\epsilon \right)}_{=1} u''_i + \underbrace{\left(-\frac{1}{6}(2h)^3\alpha - \frac{1}{6}h^3\beta + \frac{1}{6}h^3\delta + \frac{1}{6}(2h)^3\epsilon \right)}_{=0} u'''_i + \underbrace{\left(\frac{1}{24}(2h)^4\alpha + \frac{1}{24}h^4\beta + \frac{1}{24}h^4\delta + \frac{1}{24}(2h)^4\epsilon \right)}_{=0} u''''_i$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon = 0 \\ \frac{1}{2}(2h)^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\beta + \frac{1}{2}h^2\delta + \frac{1}{2}(2h)^2\epsilon = 1 \\ -\frac{1}{6}(2h)^3\alpha - \frac{1}{6}h^3\beta + \frac{1}{6}h^3\delta + \frac{1}{6}(2h)^3\epsilon = 0 \\ \frac{1}{24}(2h)^4\alpha + \frac{1}{24}h^4\beta + \frac{1}{24}h^4\delta + \frac{1}{24}(2h)^4\epsilon = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{12h^2} \\ \beta = \frac{4}{3h^2} \\ \gamma = -\frac{5}{2h^2} \\ \delta = \frac{4}{3h^2} \\ \epsilon = -\frac{1}{12h^2} \end{cases}$$

$$u''_i = -\frac{1}{12h^2}u_{i-2} + \frac{4}{3h^2}u_{i-1} - \frac{5}{2h^2}u_i + \frac{4}{3h^2}u_{i+1} - \frac{1}{12h^2}u_{i+2} = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12h^2}$$



$$u_i''' = \alpha u_{i-2} + \beta u_{i-1} + \gamma u_i + \delta u_{i+1} + \epsilon u_{i+2}$$

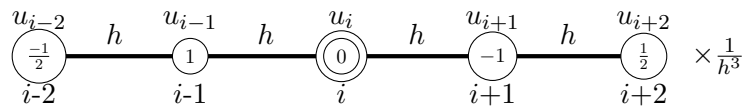
$$\begin{cases} u_{i-2} = u_i - 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2 u_i'' - \frac{1}{6}(2h)^3 u_i''' + \frac{1}{24}(2h)^4 u_i^{IV} + \dots \\ u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' - \frac{1}{6}h^3 u_i''' + \frac{1}{24}h^4 u_i^{IV} + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' + \frac{1}{6}h^3 u_i''' + \frac{1}{24}h^4 u_i^{IV} + \dots \\ u_{i+2} = u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2 u_i'' + \frac{1}{6}(2h)^3 u_i''' + \frac{1}{24}(2h)^4 u_i^{IV} + \dots \end{cases}$$

$$u_i''' = \alpha \left(u_i - 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2 u_i'' - \frac{1}{6}(2h)^3 u_i''' + \frac{1}{24}(2h)^4 u_i^{IV} \right) + \beta \left(u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' - \frac{1}{6}h^3 u_i''' + \frac{1}{24}h^4 u_i^{IV} \right) + \gamma (u_i) + \delta \left(u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' + \frac{1}{6}h^3 u_i''' + \frac{1}{24}h^4 u_i^{IV} \right) + \epsilon \left(u_i + 2hu_i' + \frac{1}{2}(2h)^2 u_i'' + \frac{1}{6}(2h)^3 u_i''' + \frac{1}{24}(2h)^4 u_i^{IV} \right)$$

$$u_i''' = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)}_{=0} u_i + \underbrace{(-2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon)}_{=0} u_i' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(2h)^2 \alpha + \frac{1}{2}h^2 \beta + \frac{1}{2}h^2 \delta + \frac{1}{2}(2h)^2 \epsilon \right)}_{=0} u_i'' + \underbrace{\left(-\frac{1}{6}(2h)^3 \alpha - \frac{1}{6}h^3 \beta + \frac{1}{6}h^3 \delta + \frac{1}{6}(2h)^3 \epsilon \right)}_{=1} u_i''' + \underbrace{\left(\frac{1}{24}(2h)^4 \alpha + \frac{1}{24}h^4 \beta + \frac{1}{24}h^4 \delta + \frac{1}{24}(2h)^4 \epsilon \right)}_{=0} u_i^{IV}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon = 0 \\ \frac{1}{2}(2h)^2 \alpha + \frac{1}{2}h^2 \beta + \frac{1}{2}h^2 \delta + \frac{1}{2}(2h)^2 \epsilon = 0 \\ -\frac{1}{6}(2h)^3 \alpha - \frac{1}{6}h^3 \beta + \frac{1}{6}h^3 \delta + \frac{1}{6}(2h)^3 \epsilon = 1 \\ \frac{1}{24}(2h)^4 \alpha + \frac{1}{24}h^4 \beta + \frac{1}{24}h^4 \delta + \frac{1}{24}(2h)^4 \epsilon = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{-1}{2h^3} \\ \beta = \frac{1}{h^3} \\ \gamma = 0 \\ \delta = \frac{-1}{h^3} \\ \epsilon = \frac{1}{2h^3} \end{cases}$$

$$u_i''' = -\frac{1}{2h^3} u_{i-2} + \frac{1}{h^3} u_{i-1} - \frac{1}{h^3} u_{i+1} + \frac{1}{2h^3} u_{i+2} = \frac{-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{2h^3}$$



$$u_i^{IV} = \alpha u_{i-2} + \beta u_{i-1} + \gamma u_i + \delta u_{i+1} + \epsilon u_{i+2}$$

$$\begin{cases} u_{i-2} = u_i - 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i - \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i + \dots \\ u_{i-1} = u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i - \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i + \dots \\ u_{i+2} = u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i + \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i + \dots \end{cases}$$

$$u''_i = \alpha \left(u_i - 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i - \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i \right) + \beta \left(u_i - hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i - \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i \right) + \\ + \gamma(u_i) + \delta \left(u_i + hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i + \frac{1}{6}h^3u'''_i + \frac{1}{24}h^4u''''_i \right) + \epsilon \left(u_i + 2hu'_i + \frac{1}{2}(2h)^2u''_i + \frac{1}{6}(2h)^3u'''_i + \frac{1}{24}(2h)^4u''''_i \right)$$

$$u''_i = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)}_{=0} u_i + \underbrace{(-2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon)}_{=0} u'_i + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(2h)^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\beta + \frac{1}{2}h^2\delta + \frac{1}{2}(2h)^2\epsilon \right)}_{=0} u''_i + \\ + \underbrace{\left(-\frac{1}{6}(2h)^3\alpha - \frac{1}{6}h^3\beta + \frac{1}{6}h^3\delta + \frac{1}{6}(2h)^3\epsilon \right)}_{=0} u'''_i + \underbrace{\left(\frac{1}{24}(2h)^4\alpha + \frac{1}{24}h^4\beta + \frac{1}{24}h^4\delta + \frac{1}{24}(2h)^4\epsilon \right)}_{=1} u''''_i$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2h\alpha - h\beta + h\delta + 2h\epsilon = 0 \\ \frac{1}{2}(2h)^2\alpha + \frac{1}{2}h^2\beta + \frac{1}{2}h^2\delta + \frac{1}{2}(2h)^2\epsilon = 0 \\ -\frac{1}{6}(2h)^3\alpha - \frac{1}{6}h^3\beta + \frac{1}{6}h^3\delta + \frac{1}{6}(2h)^3\epsilon = 0 \\ \frac{1}{24}(2h)^4\alpha + \frac{1}{24}h^4\beta + \frac{1}{24}h^4\delta + \frac{1}{24}(2h)^4\epsilon = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{h^4} \\ \beta = \frac{-4}{h^4} \\ \gamma = \frac{6}{h^4} \\ \delta = \frac{-4}{h^4} \\ \epsilon = \frac{1}{h^4} \end{cases}$$

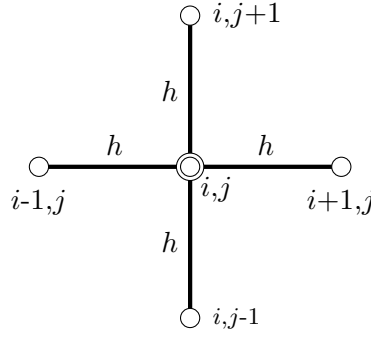
$$u''_i = \frac{1}{h^4}u_{i-2} - \frac{4}{h^4}u_{i-1} + \frac{6}{h^4} - \frac{4}{h^4}3hu_{i+1} + \frac{1}{h^4}u_{i+2} = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} u_{i-2} & & u_{i-1} & & u_i & & u_{i+1} & & u_{i+2} \\ \textcircled{1} & \xrightarrow{h} & \textcircled{-4} & \xrightarrow{h} & \textcircled{6} & \xrightarrow{h} & \textcircled{-4} & \xrightarrow{h} & \textcircled{1} \\ i-2 & & i-1 & & i & & i+1 & & i+2 \end{array} \times \frac{1}{h^4}$$

- Metoda współczynników nieoznaczonych 2D – Przykład 7

$$u_{lm} = u_{ij} + h \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + k \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}k^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial y^2} + \dots \\ + \dots \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n u_{ij} + \dots \text{ gdzie } h = x_l - x_i, k = y_m - y_j$$

Standardowa gwiazda pięciowęzłowa



$$\Delta u_{i,j} = \nabla^2 u_{i,j} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \alpha u_{i-1,j} + \beta u_{i+1,j} + \gamma u_{i,j-1} + \delta u_{i,j+1} + \epsilon u_{i,j}$$

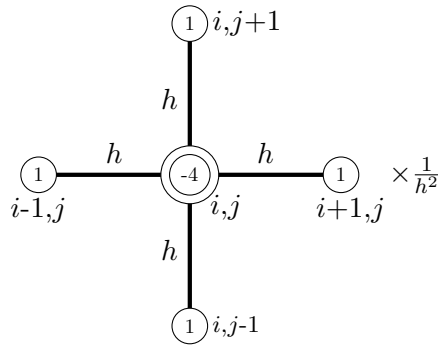
$$\begin{cases} u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \dots \\ u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \dots \\ u_{i,j-1} = u_{i,j} - h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \dots \\ u_{i,j+1} = u_{i,j} + h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \dots \\ u_{i,j} = u_{i,j} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i,j} = & \alpha \left(u_{i,j} - h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \right) + \beta \left(u_{i,j} + h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \right) + \\ & + \gamma \left(u_{i,j} - h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \right) + \delta \left(u_{i,j} + h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \right) + \epsilon u_{i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i,j} = & \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)}_{=0} u_{i,j} + \underbrace{(-h\alpha + h\beta)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \underbrace{(-h\gamma + h\delta)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \\ & + \underbrace{\left(\frac{1}{2} h^2 \alpha + \frac{1}{2} h^2 \beta \right)}_{=1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} h^2 \gamma + \frac{1}{2} h^2 \delta \right)}_{=1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -h\alpha + h\beta = 0 \\ -h\gamma + h\delta = 0 \\ \frac{1}{2} h^2 \alpha + \frac{1}{2} h^2 \beta = 1 \\ \frac{1}{2} h^2 \gamma + \frac{1}{2} h^2 \delta = 1 \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{h^2}, \epsilon = \frac{-4}{h^2}$$

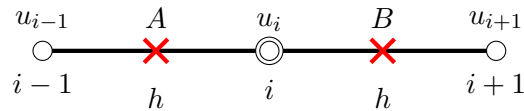
$$\Delta u_{i,j} = \frac{1}{h^2} u_{i-1,j} + \frac{1}{h^2} u_{i+1,j} + \frac{1}{h^2} u_{i,j-1} + \frac{1}{h^2} u_{i,j+1} + \frac{-4}{h^2} u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$



- Składanie operatorów – Przykład 8

$$u'_i = \frac{-u_{i-1} + u_{i+1}}{2h}$$

Standardowa gwiazda trójwęzłowa



$$u'_A = \frac{-u_{i-1} + u_i}{2 \cdot (\frac{1}{2}h)} = \frac{-u_{i-1} + u_i}{h}, \quad u'_B = \frac{-u_i + u_{i+1}}{2 \cdot (\frac{1}{2}h)} = \frac{-u_i + u_{i+1}}{h}$$

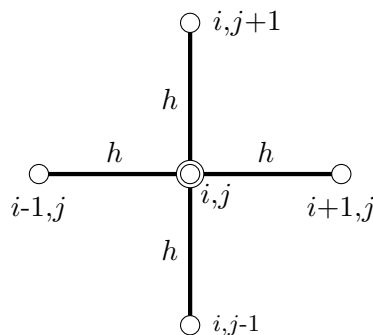
$$u'_i = \frac{-u_A + u_B}{2 \cdot (\frac{1}{2}h)} \Rightarrow u''_i = \frac{-u'_A + u'_B}{h}$$

$$u''_i = \frac{-\frac{-u_{i-1} + u_i}{h} + \frac{-u_i + u_{i+1}}{h}}{h}$$

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u'_i + u_{i+1}}{h^2}$$

- Składanie operatorów 2D – Przykład 9

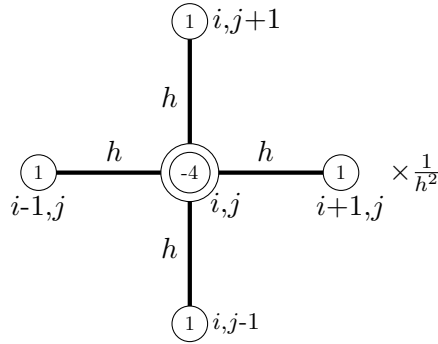
Standardowa gwiazda pięciowęzłowa



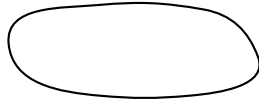
$$\Delta u_{i,j} = \nabla^2 u_{i,j} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

$$\Delta u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

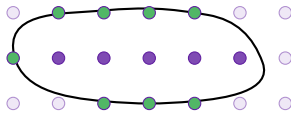


4.2. Generacja równań dyskretnych (różnicowych)



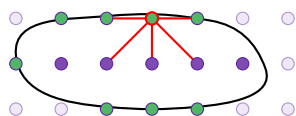
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ dla } P \in \Omega \\ \mathcal{G}u = g \text{ dla } P \in \partial\Omega \end{cases} \quad u = u(P)$$

↓
Kolokacja w węzłach

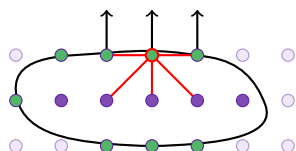


$$\begin{cases} \mathcal{L}u_i = f_i \text{ dla } P_i \in \Omega_i \\ \mathcal{G}u_i = g_i \text{ dla } P_i \in \partial\Omega_i \end{cases} \quad u_i = u(P_i)$$

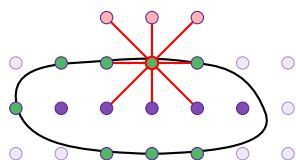
4.3. Uwzględnienie warunków brzegowych



Operator budowany tylko na węzłach wewnętrznych



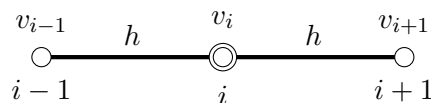
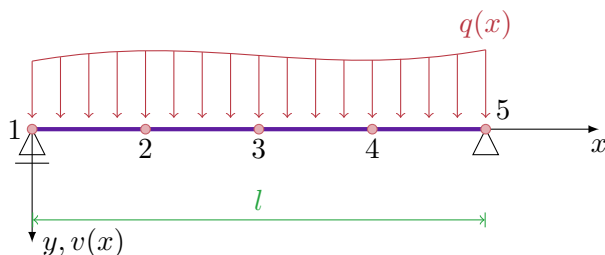
Operator budowany na węzłach wewnętrznych
z wykorzystaniem uogólnionych stopni swobody



Operator budowany na węzłach wewnętrznych
i zewnętrznych „fikcyjnych” węzłach

4.4. Zastosowanie MRS(lokalnego)

- Zginanie belki swobodnie podpartej - Przykład 10



$$v_i'' = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2}$$

Sformułowanie matematyczne - Równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu

$$\frac{d^2v}{dx^2} = f(x) = -\frac{M(x)}{EI}, \quad v(0) = 0, \quad v(l) = 0$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad \text{dla } q = \text{const}$$

Zamiana pochodnych ścisłych na numeryczne

$$\text{dla węzła } i = 2, 3, 4 : \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

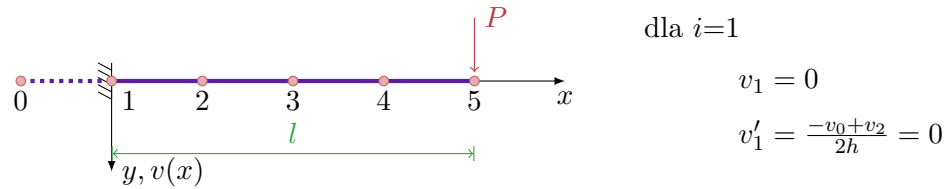
zapis tradycyjny

$$\begin{cases} \frac{\overbrace{v_1}^{=0} - 2v_2 + v_3}{h^2} = f(x_2) \\ \frac{v_2 - 2v_3 + v_4}{h^2} = f(x_3) \\ \frac{v_3 - 2v_4 + \overbrace{v_5}^{=0}}{h^2} = f(x_4) \end{cases}$$

zapis macierzowy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Zginanie wspornika - Przykład 11 – wariant I: węzeł fikcyjny



Sformułowanie matematyczne - Równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu

$$\frac{d^2v}{dx^2} = f(x) = -\frac{M(x)}{EI}, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0$$

$$M(x) = -P(l - x)$$

Zamiana pochodnych ścisłych na numeryczne

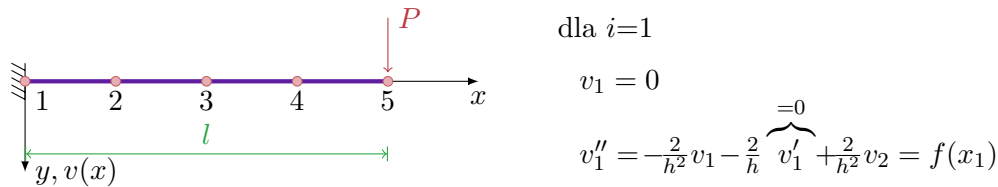
$$\text{dla węzła } i = 1, 2, 3, 4 : \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

Układ równań

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x_1) = \frac{Pl}{EI} \\ f(x_2) = \frac{3}{4} \frac{Pl}{EI} \\ f(x_3) = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EI} \\ f(x_4) = \frac{1}{4} \frac{Pl}{EI} \end{bmatrix}$$

$$v_0 = v_2 = \frac{1}{32} \frac{Pl^3}{EI}, \quad v_1 = 0, \quad v_3 = \frac{7}{64} \frac{Pl^3}{EI}, \quad v_4 = \frac{7}{32} \frac{Pl^3}{EI}, \quad v_5 = \frac{11}{32} \frac{Pl^3}{EI}$$

- Zginanie wspornika - Przykład 11 – wariant II: ulepszony operator brzegowy



Sformułowanie matematyczne - Równanie różniczkowe zwyczajne II rzędu

$$\frac{d^2v}{dx^2} = f(x) = -\frac{M(x)}{EI}, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0$$

$$M(x) = -P(l - x)$$

Zamiana pochodnych ścisłych na numeryczne

$$\text{dla węzła } i = 2, 3, 4 : \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

Układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{h^2} & \frac{2}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) = \frac{Pl}{EI} \\ f(x_2) = \frac{3}{4} \frac{Pl}{EI} \\ f(x_3) = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EI} \\ f(x_4) = \frac{1}{4} \frac{Pl}{EI} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{1}{32} \frac{Pl^3}{EI}, \quad v_3 = \frac{7}{64} \frac{Pl^3}{EI}, \quad v_4 = \frac{7}{32} \frac{Pl^3}{EI}, \quad v_5 = \frac{11}{32} \frac{Pl^3}{EI}$$

- Zginanie belki – Belka statycznie niewyznaczalna – Przykład 12

Sformułowanie matematyczne - Równanie różniczkowe zwyczajne IV rzędu

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{p_y(x)}{EI}$$

+ warunki brzegowe.

Zamiana pochodnych ścisłych na numeryczne

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = b_i, \quad b_i = h^4 \cdot \frac{p_{y_i}}{EI}$$

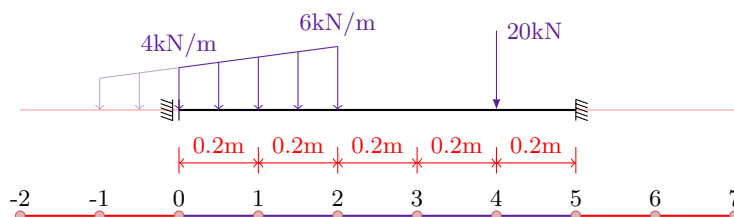
Funkcje "wtórne": moment zginający $M(x)$ oraz siła poprzeczna $T(x)$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2}, \quad T(x) = -EI \frac{d^3 v(x)}{dx^3}.$$

Zamiana pochodnych ścisłych na numeryczne (gwiazda pięciowęzłowa)

$$M(x) = -EI \frac{-v_{i-2} + 16v_{i-1} - 30v_i + 16v_{i+1} - v_{i+2}}{12h^2}$$

$$T(x) = -EI \frac{-v_{i-2} + 2v_{i-1} - 2v_{i+1} + v_{i+2}}{2h^3}$$

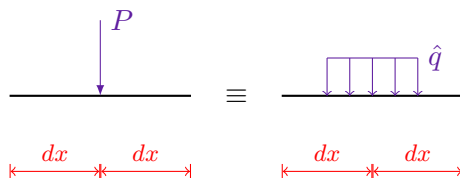


Równanie różnicowe dla punktów $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$$1 \cdot v_{i-2} - 4 \cdot v_{i-1} + 6 \cdot v_i - 4 \cdot v_{i+1} + 1 \cdot v_{i+2} = p_y(x_i)b \quad \text{gdzie} \quad b = h^4/(EI)$$

Warunki brzegowe:

dla $x = 0$:	$v' = 0$		$T = 0$
$i = 0$:	$1 \cdot v_{-2} - 8 \cdot v_{-1} + 8 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = 0$		$-1 \cdot v_{-2} + 2 \cdot v_{-1} - 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$
dla $x = L$:	$v = 0$		$v' = 0$
$i = 5$:	$v_5 = 0$		$1 \cdot v_3 - 8 \cdot v_4 + 8 \cdot v_6 - 1 \cdot v_7 = 0$



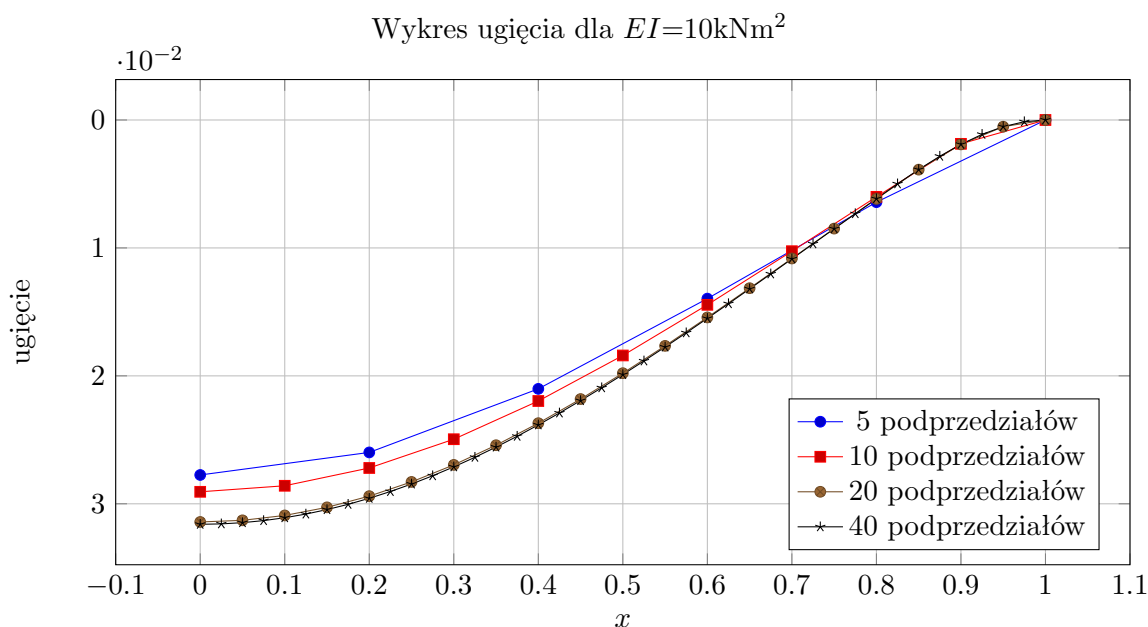
$$P = \hat{q} \, dx \Rightarrow \hat{q} = \frac{P}{dx} = \frac{20}{0.2} = 100$$

Układ równań MRS:

1. $1 \cdot v_{-2} - 8 \cdot v_{-1} + 8 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = 0$
2. $-1 \cdot v_{-2} + 2 \cdot v_{-1} - 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$
3. $1 \cdot v_{-2} - 4 \cdot v_{-1} + 6 \cdot v_0 - 4 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 4b$
4. $1 \cdot v_{-1} - 4 \cdot v_0 + 6 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 5b$
5. $1 \cdot v_0 - 4 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = 3b$
6. $1 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 + 6 \cdot v_3 - 4 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 = 0$
7. $1 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3 + 6 \cdot v_4 - 4 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 = 100b$
8. $1 \cdot v_3 - 4 \cdot v_4 + 6 \cdot v_5 - 4 \cdot v_6 + 1 \cdot v_7 = 0$
9. $1 \cdot v_5 = 0$
10. $1 \cdot v_3 - 8 \cdot v_4 + 8 \cdot v_6 - 1 \cdot v_7 = 0$

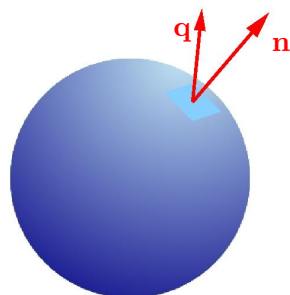
-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
----	----	---	---	---	---	---	---	---	---

wb	1	-8		8	-1						v_{-2}	0		0.2102
$i=0$	-1	2		-2	1						v_{-1}	0		0.2598
0	1	-4	6	-4	1						v_0	4		0.2775
1		1	-4	6	-4	1					v_1	5		0.2598
2			1	-4	6	-4	1				v_2	3		0.2102
3				1	-4	6	-4	1			v_3	0		0.1396
4					1	-4	6	-4	1		v_4	100		0.0642
5						1	-4	6	-4	1	v_5	0		0
wb								1			v_6	0		0.1229
$i=5$						1	-8		8	-1	v_7	0		0.6090



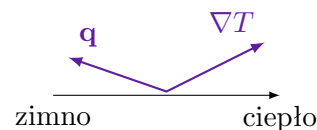
4.5. Problem stacjonarnego przepływu ciepła w 3D

Gęstość strumienia przepływu ciepła $\mathbf{q}$



$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n}$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$



Prawo Fouriera - opis ruchu ciepła przez przewodzenie

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla T$$

gdzie:

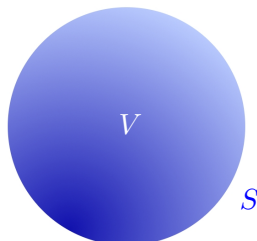
- wektor gęstości strumienia przepływu ciepła: $\mathbf{q} = \{q_x \ q_y \ q_z\}$ [W/m^2]
- wektor gradientu temperatury: $\nabla T = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right\}$ [$^{\circ}\text{K}/\text{m}$]
- macierz przewodnictwa cieplnego: $\mathbf{D} = \{k_{ij}\}$ [$\text{W}/(\text{m}^{\circ}\text{K})$]

Gęstość strumienia wzrasta ze wzrostem gradientu temperatury.
Ciepło płynie od wyższej do niższej temperatury

Bilans cieplny dla stacjonarnego przepływu ciepła

Ilość ciepła generowanego = ilość ciepła wypływającego

$$\int_V f dV = \int_S q_n dS, \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

gdzie f – ilość ciepła dostarczana ciału na jednostkę objętości i czasu [$\text{J}/(\text{m}^3\text{s}) = \text{W}/\text{m}^3$]

Wykorzystując twierdzenie Greena–Gaussa–Ostrogradzkiego o całkowaniu przez części

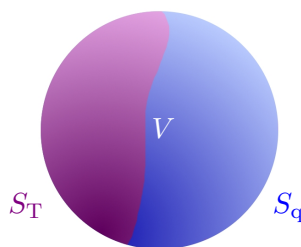
$$\begin{aligned} \int_S q_n dS &= \int_S \mathbf{q}^T \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{q} dV = \int_V \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} dV \\ \int_V f dV &= \int_V \text{div} \mathbf{q} dV = \int_V \nabla^T \mathbf{q} dV, \quad \forall \mathbf{x} \in V \Rightarrow \nabla^T \mathbf{q} = f, \quad \forall \mathbf{x} \in V \end{aligned}$$

Równanie przewodnictwa

$$\nabla^T (\mathbf{D} \nabla T) + f = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

+ warunki brzegowe

$$\begin{aligned} q_n &= \mathbf{q}^T \mathbf{n} = \hat{q} && \text{na } S_q - \text{naturalne w.b. (Neumanna)} \\ T &= \hat{T} && \text{na } S_T - \text{podstawowe w.b. (Dirichleta)} \end{aligned}$$

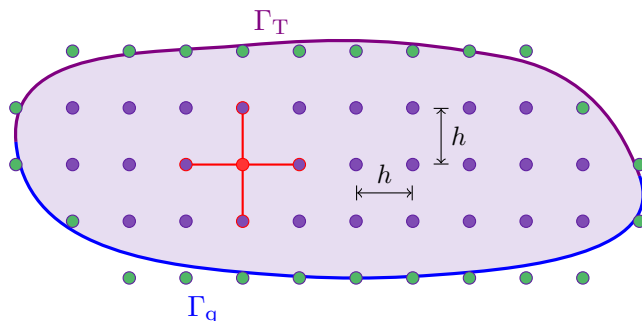
Dla materiałów izotropowych macierz $\mathbf{D}$ przyjmuje formę $\mathbf{D} = k\mathbf{I}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{f}{k} = 0 \quad - \text{równanie Poissona}$$

Dla materiałów izotropowych bez źródła ciepła

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad - \text{równanie Laplace'a}$$

- Stacjonarny przepływ ciepła – Przykład 13



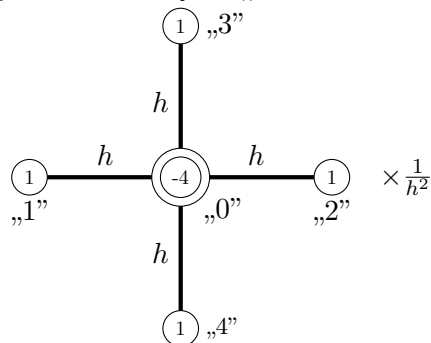
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{f}{k}, \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

+ warunki brzegowe

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = \hat{q} \quad \text{na } \Gamma_q$$

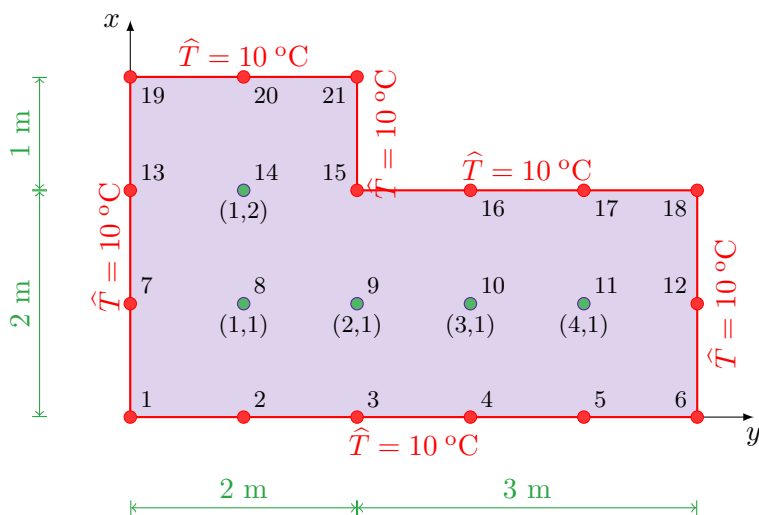
$$T = \hat{T} \quad \text{na } \Gamma_T$$

Operator w węźle „0”



$$\Delta T_0 = \nabla^2 T_0 = \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}$$

$$= (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0) \frac{1}{h^2}$$



Materiał izotropowy

$$k_x = k_y = k = 7 \frac{\text{J}}{\text{°Cms}}$$

Intensywność generacji ciepła
na jednostkę grubości

$$f(x, y) = (20x - 30y + 10) \frac{\text{J}}{\text{m}^2\text{s}}$$

moduł siatki

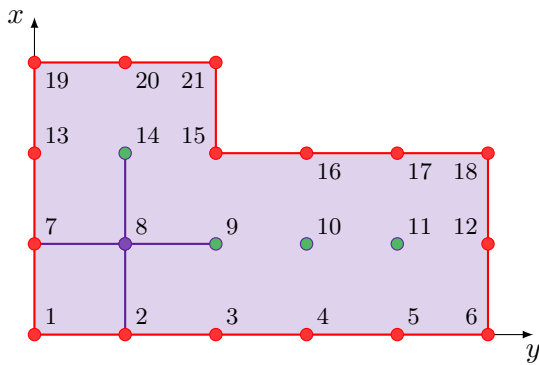
$$h = 1 \text{ m}$$

węzły wewnętrzne: 8,9,10,11,14

węzły brzegowe: 1-6,7,12,13,15-21

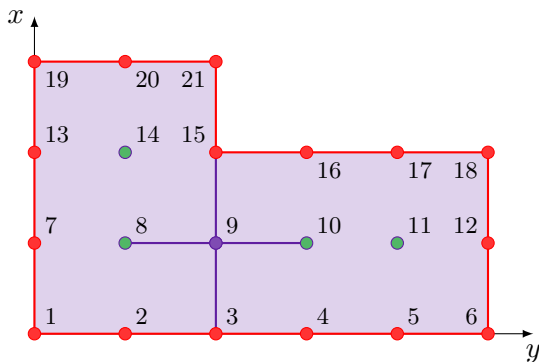
Początkowa postać układu równań (21×21)

$$\begin{bmatrix}
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000 \\
 000000000000000000000000
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5 \\
 T_6 \\
 T_7 \\
 T_8 \\
 T_9 \\
 T_{10} \\
 T_{11} \\
 T_{12} \\
 T_{13} \\
 T_{14} \\
 T_{15} \\
 T_{16} \\
 T_{17} \\
 T_{18} \\
 T_{19} \\
 T_{20} \\
 T_{21}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$



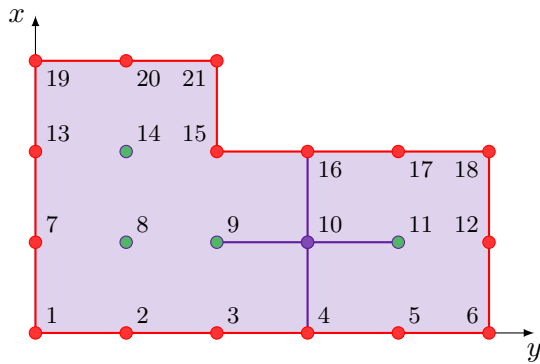
Równanie dla węzła 8

$$T_2 + T_9 + T_{14} + T_7 - 4T_8 = -f(x_8, y_8) \frac{h^2}{k} = 0$$



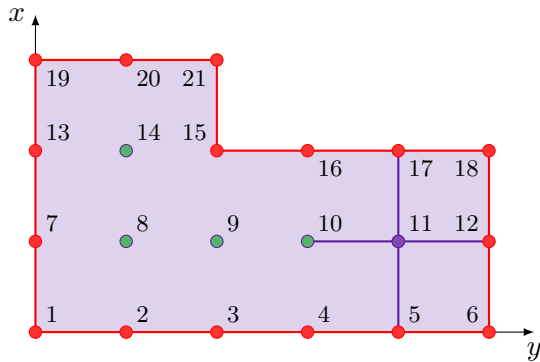
Równanie dla węzła 9

$$T_3 + T_{10} + T_{15} + T_8 - 4T_9 = -f(x_9, y_9) \frac{h^2}{k} = -\frac{20}{7}$$



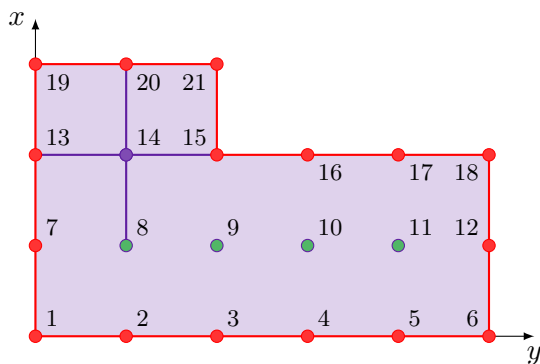
Równanie dla węzła 10

$$T_4 + T_{11} + T_{16} + T_9 - 4T_{10} = -f(x_{10}, y_{10}) \frac{h^2}{k} = -\frac{40}{7}$$



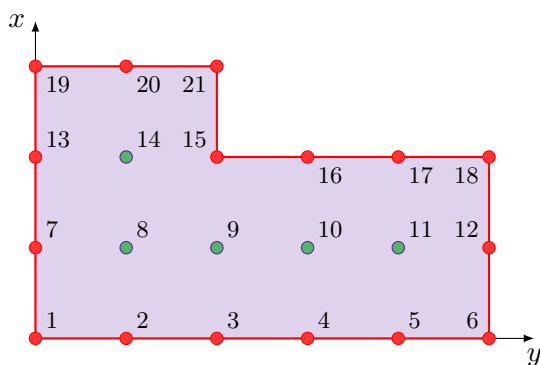
Równanie dla węzła 11

$$T_5 + T_{12} + T_{17} + T_{10} - 4T_{11} = -f(x_{11}, y_{11}) \frac{h^2}{k} = -\frac{60}{7}$$



Równanie dla węzła 14

$$T_8 + T_{15} + T_{20} + T_{13} - 4T_{14} = -f(x_{14}, y_{14}) \frac{h^2}{k} = \frac{30}{7}$$



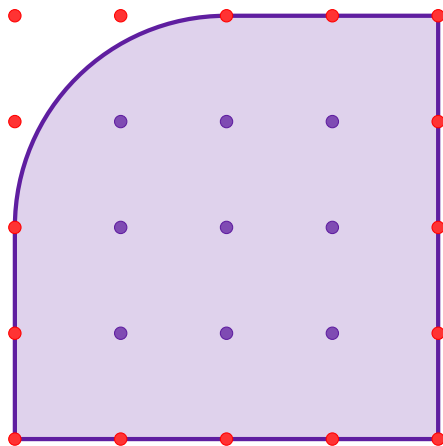
warunki brzegowe

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = T_{12} = T_{13} = 10$$

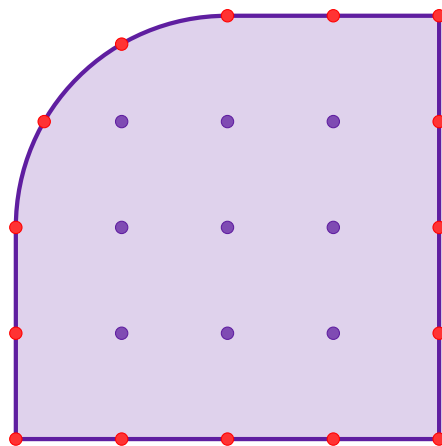
$$T_{15} = T_{16} = T_{17} = T_{18} = T_{19} = T_{20} = T_{21} = 10$$

[illegible]

4.6. Brzeg krzywoliniowy



MRS klasyczna



MRS dla siatek nieregularnych

4.7. Bilans MRS i MES

MRS

Zalety:

- Najstarsza metoda komputerowa
- Łatwość implementacji
- Istnienie wersji lokalnej
- Łatwa generacja siatki
- Dydaktyczny charakter

Wady:

- Trudności przy brzegu zakrzywionym
- Nie można przeprowadzić adaptacji
- Nie można lokalnie zagęszczać siatki (naroża, obciążenie skupione, ...)
- Trudna do automatyzacji

MES

Zalety:

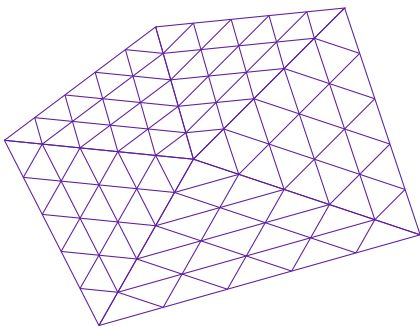
- Najbardziej powszechna metoda komputerowa
- Podstawa programów komputerowych
- Szerokie pole zastosowań
- Ogromna biblioteka elementów skończonych
- Duża dokładność rozwiązania

Wady:

- Kłopotliwa generacja siatki dla obszarów o skomplikowanej geometrii
- Mało efektywna przy częstej przebudowie siatki
- Trudność w uwzględnieniu nieliniowości geometrycznych (duże przemieszczenia, ...)
- Trudności w analizie ruchomego brzegu, rozwoju szczeliny
- Zjawisko blokady

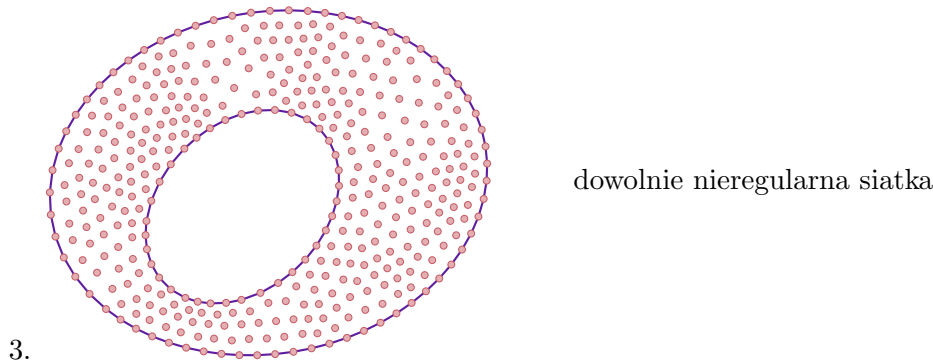
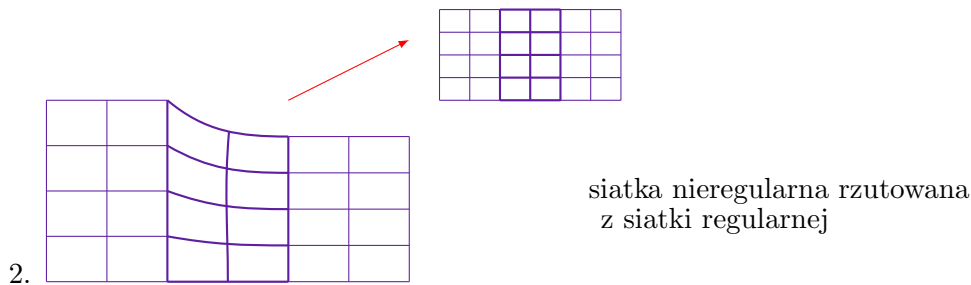
5. Bezsiatkowa metoda różnic skończonych

Siatki nieregularne



1.

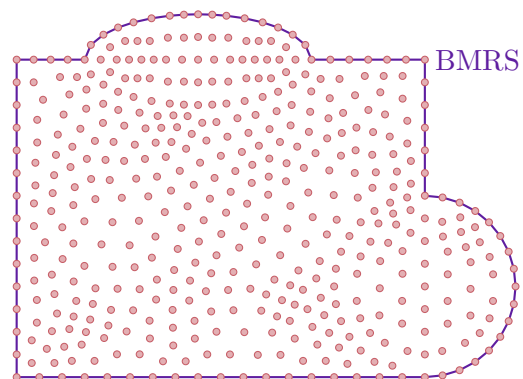
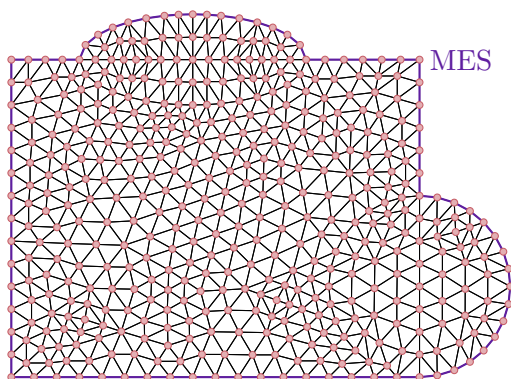
siatka regularna w podobozarach



Bezsiatkowa (Uogólniona) Metoda Różnic Skończonych (BMRS)

Cechy metody

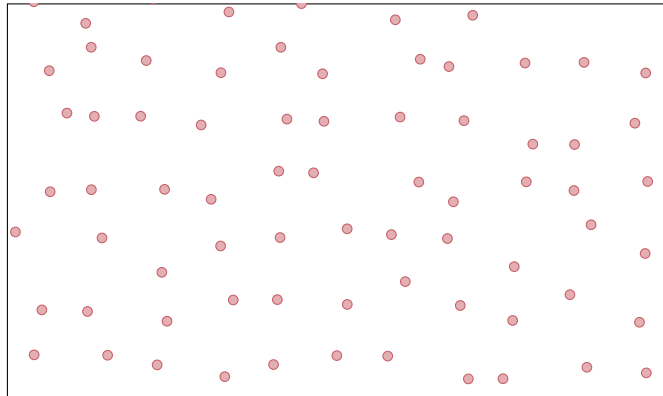
- **Dowolnie nieregularne chmury punktów.** Węzły niepowiązane ze sobą żadną strukturą typu siatka regularna lub element
- Każdy węzeł może być usunięty, dodany, przesunięty (adaptacja typu h , obciążenie skupione, szczelina, ruchomy brzeg, ...)
- Zamiana **operatorów różniczkowych** na **różnicowe**
- Aproksymacja lokalna jest oparta na grupie węzłów, dokonywana **metodą najmniejszych ważonych ruchomych kwadratów (Moving Weighted Least Squares)**



Algorytm metody BMRS

1. Generacja węzłów
2. Podział podobszaru – Topologia
 - wielokąty Voronoi
 - trójkąty Delaunaya
3. Generacja gwiazd - sąsiedztwo węzłowe
4. Generacja wzorów różnicowych – Aproksymacja MWLS
5. Całkowanie numeryczne (dotyczy wariantu wariacyjnego metody)
6. Uwzględnienie warunków brzegowych
7. Generacja równań różnicowych
 - kolokacja (dotyczy wariantu lokalnego metody)
 - minimalizacja funkcjonału lub równanie wariacyjne (dotyczy wariantu wariacyjnego metody)
8. Rozwiązanie układu równań
9. Postprocessing

5.1. Generacja węzłów

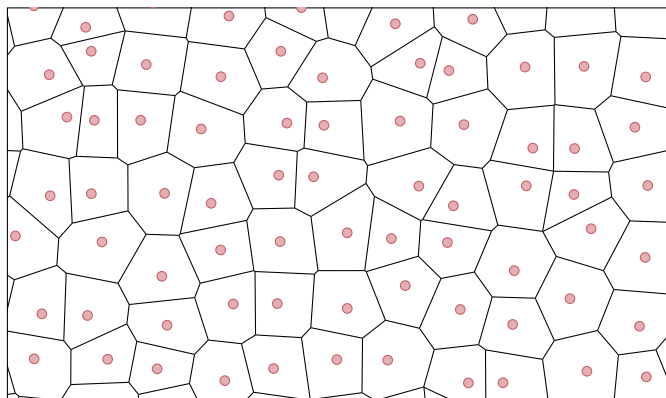


Kryterium generacji

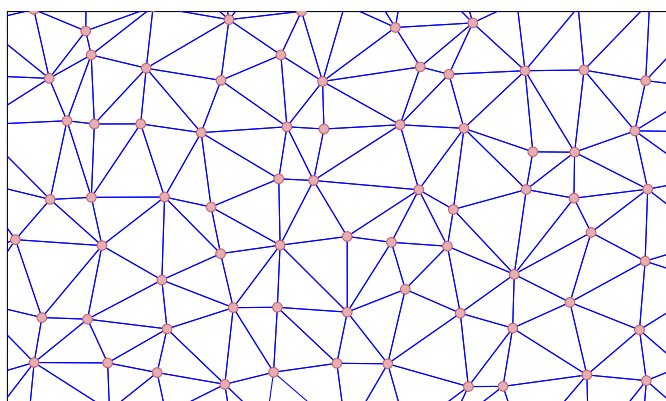
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}} \geq \bar{p}$$

gdzie $\bar{p}$ funkcja określająca gęstość siatki

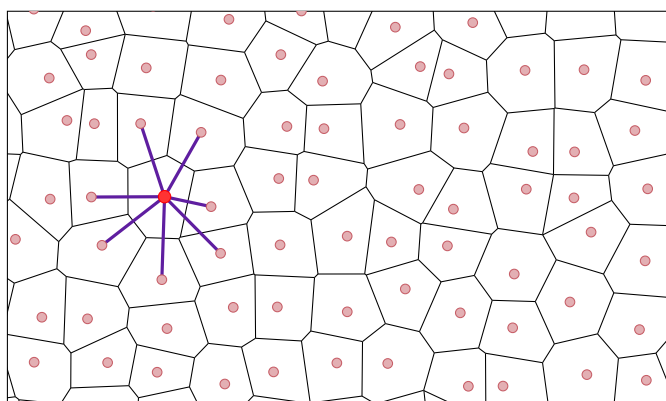
5.2. Podział obszaru – Tessalacja Voronoi



5.3. Połączenia węzłowe – Triangularyzacja Delaunaya

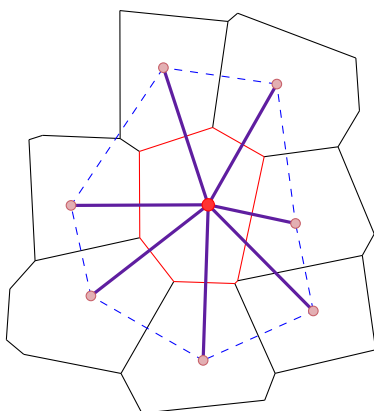


5.4. Determinacja topologii – Sąsiedztwo węzłowe

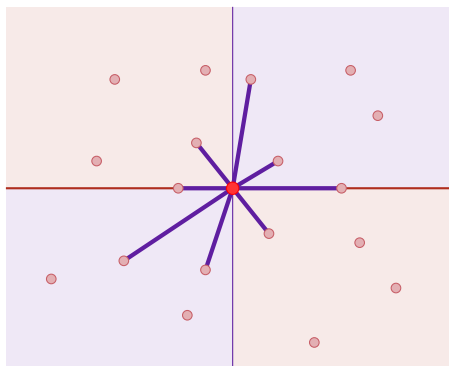


Optymalna selekcja gwiazd różnicowych

Kryteria selekcji:

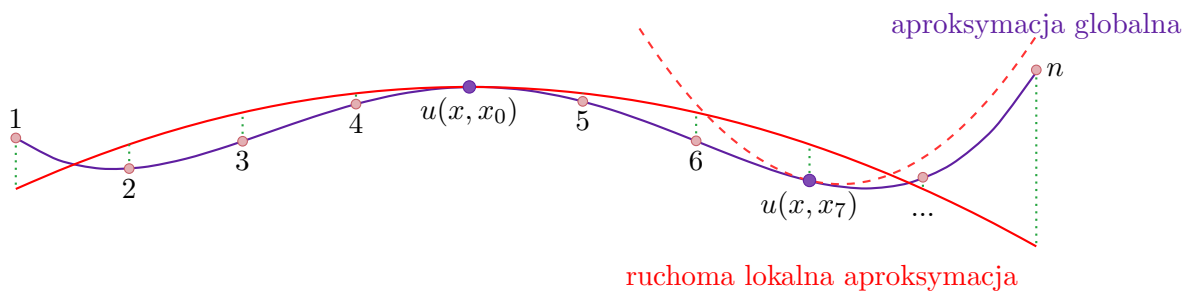


sąsiadów Voronoi



„krzyża”

5.5. Aproksymacja MWLS - idea 1D



Aproksymacja lokalna 1D – zapis tradycyjny (wielomianowy)

$$u(x, x_0) = a_1 + a_2(x - x_0) + a_3(x - x_0)^2 + \dots + a_{p+1}(x - x_0)^p = \sum_{i=1}^{p+1} a_i(x - x_0)^{i-1}$$

a_i – matematyczne stopnie swobody

p – stopień aproksymacji

Aproksymacja lokalna 1D – zapis bezsiatkowy (rozwiniecie w szereg Taylora)

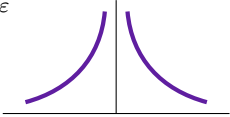
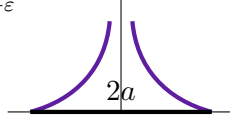
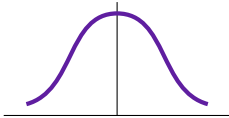
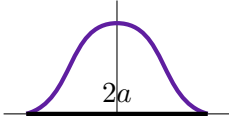
$$u(x, x_0) = u_0 + h \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_0} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + \dots + \frac{h^p}{p!} \frac{d^p u}{dx^p} \Big|_{x=x_0} = \sum_{i=0}^p \frac{h^i}{i!} \frac{d^i u}{dx^i} \Big|_{x=x_0} = \sum_{i=0}^p \frac{h^i}{i!} u_0^{(i)}$$

$$h = x - x_0, \quad \frac{d^i u}{dx^i} \Big|_{x=x_0} = u_0^{(i)} - \text{fizyczne stopnie swobody}$$

Funkcje wagowe

$$\omega(x - x_0) = f(d), \quad d = \|x - x_0\| \quad \text{powszechnie stosowane}$$

Klasyfikacja funkcji wagowych

	nośnik nieskończony (wygodne dla obliczeń)	nośnik skończony (wygodne dla matematycznych dowodów)
osobliwe interpolacja	$\omega(d) = \frac{1}{h^{1+p-s+\varepsilon}}$ 	$\omega(d) = \frac{1}{h^{1+p-s+\varepsilon}}$ 
nieosobliwe wygładzanie		

5.6. Aproksymacja MWLS

Ważona funkcja błędu

$$J = \sum_{s=0}^m \sum_{j=1}^{n_s} \left[\left(\overbrace{\left(\sum_{i=s}^p \frac{h_j^{i-s}}{(i-s)!} u_0^{(i)} - u_j^{(s)} \right)}^{\bar{u}_j^{(s)}} \right)^2 \left(\frac{1}{h_j^{1+p-s}} \right)^2 \right]$$

gdzie

- p – stopień aproksymacji
- j – numer węzła dla którego zastosowano rozwinięcie w szereg Taylora
- s – typ uogólnionego stopnia swobody, np. $s = 0 \Rightarrow u_j$, $s = 1 \Rightarrow u'_i$
- m – liczba typów uogólnionych stopni swobody, np. $m = 0 \Rightarrow u_j$; $m = 1 \Rightarrow u_j, u'_j$.
- $n_s = [n_0, n_1, \dots, n_m]$ – liczba stopni swobody danego typu dla których zastosowano rozwinięcie w szereg Taylora, np. $u_1, u'_1 \overset{u_0}{\circ} u_2$ lub $u_1, u'_1 \overset{0}{\times} u_2$ $n_0 = 2, n_1 = 1$

Minimalizacja błędu

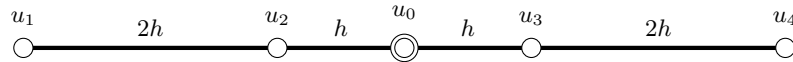
$$\frac{\partial J}{\partial u_0^{(t)}} = 0$$

gdzie

- $u_0^{(t)} = \frac{d^t u}{dx^t}$ – poszukiwane pochodne t w węźle/punkcie x_0

5.7. Aproksymacja MWLS – Przykłady

- Przykład 14



Założenia: $p = 2, m = 0, n_0 = 4$

Szukane: u'_0 i u''_0

Rozwinięcie w szereg Taylora wartości funkcji w węzłach względem u_0

$$\bar{u}_1 = u_0 - 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0$$

$$\bar{u}_2 = u_0 - hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0$$

$$\bar{u}_3 = u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0$$

$$\bar{u}_4 = u_0 + 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0$$

Budowa funkcji błędu

$$J = (\bar{u}_1 - u_1)^2 \left(\frac{1}{(3h)^{1+2-0}} \right)^2 + (\bar{u}_2 - u_2)^2 \left(\frac{1}{h^{1+2-0}} \right)^2 +$$

$$+ (\bar{u}_3 - u_3)^2 \left(\frac{1}{h^{1+2-0}} \right)^2 + (\bar{u}_4 - u_4)^2 \left(\frac{1}{(3h)^{1+2-0}} \right)^2$$

$$J = (u_0 - 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_1)^2 \frac{1}{729h^6} + (u_0 - hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_2)^2 \frac{1}{h^6} +$$

$$+ (u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_3)^2 \frac{1}{h^6} + (u_0 + 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_4)^2 \frac{1}{729h^6}$$

Minimalizacja funkcji błędu

$$\frac{\partial J}{\partial u'_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u''_0} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial u'_0} = 2(u_0 - 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_1) \frac{1}{729h^6}(-3h) + 2(u_0 - hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_2) \frac{1}{h^6}(-h) +$$

$$+ 2(u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_3) \frac{1}{h^6}h + 2(u_0 + 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_4) \frac{1}{729h^6}3h = 0 \Bigg/ \cdot \frac{243h^5}{2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u''_0} = 2(u_0 - 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_1) \frac{1}{729h^6} \frac{(3h)^2}{2} + 2(u_0 - hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_2) \frac{1}{h^6} \frac{h^2}{2} +$$

$$+ 2(u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_3) \frac{1}{h^6} \frac{h^2}{2} + 2(u_0 + 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_4) \frac{1}{729h^6} \frac{(3h)^2}{2} = 0 \Bigg/ \cdot 81h^4$$

$$\begin{aligned}
& - (u_0 - 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_1) - 243(u_0 - hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_2) + \\
& + 243(u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_3) + (u_0 + 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_4) = 0
\end{aligned}$$

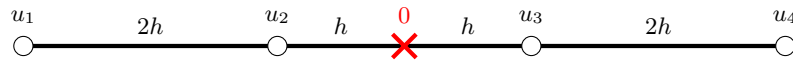
$$\begin{aligned}
& (u_0 - 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_1) + 81(u_0 - hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_2) + \\
& + 81(u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2}u''_0 - u_3) + (u_0 + 3hu'_0 + \frac{(3h)^2}{2}u''_0 - u_4) = 0
\end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\begin{aligned}
492hu'_0 &= -u_1 - 243u_2 + 243u_3 + u_4 \\
90h^2u''_0 &= u_1 + 81u_2 - 164u_0 + 81u_3 + u_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_0 &= \frac{-u_1 - 243u_2 + 243u_3 + u_4}{492h} \\
u''_0 &= \frac{u_1 + 81u_2 - 164u_0 + 81u_3 + u_4}{90h^2}
\end{aligned}$$

• Przykład 15



Założenia: $p = 1, m = 0, n_0 = 4$

Szukane: u_0 i u'_0

Rozwinięcie w szereg Taylora wartości funkcji w węzłach względem u_0

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= u_0 - 3hu'_0 \\
\bar{u}_2 &= u_0 - hu'_0 \\
\bar{u}_3 &= u_0 + hu'_0 \\
\bar{u}_4 &= u_0 + 3hu'_0
\end{aligned}$$

Budowa funkcji błędu

$$\begin{aligned}
J &= (\bar{u}_1 - u_1)^2 \left(\frac{1}{(3h)^{1+1-0}} \right)^2 + (\bar{u}_2 - u_2)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-0}} \right)^2 + \\
& + (\bar{u}_3 - u_3)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-0}} \right)^2 + (\bar{u}_4 - u_4)^2 \left(\frac{1}{(3h)^{1+1-0}} \right)^2
\end{aligned}$$

$$J = (u_0 - 3hu'_0 - u_1)^2 \left(\frac{1}{(3h)^2} \right)^2 + (u_0 - hu'_0 - u_2)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + \\ + (u_0 + hu'_0 - u_3)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + (u_0 + 3hu'_0 - u_4)^2 \left(\frac{1}{(3h)^2} \right)^2$$

Minimalizacja funkcji błędu

$$\frac{\partial J}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u'_0} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial u_0} = 2(u_0 - 3hu'_0 - u_1) \frac{1}{81h^4} + 2(u_0 - hu'_0 - u_2) \frac{1}{h^4} + \\ + 2(u_0 + hu'_0 - u_3) \frac{1}{h^4} + 2(u_0 + 3hu'_0 - u_4) \frac{1}{81h^4} = 0 \Bigg/ \cdot \frac{81h^4}{2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u'_0} = 2(u_0 - 3hu'_0 - u_1) \frac{1}{81h^4} (-3h) + 2(u_0 - hu'_0 - u_2) \frac{1}{h^4} (-h) + \\ + 2(u_0 + hu'_0 - u_3) \frac{1}{h^4} h + 2(u_0 + 3hu'_0 - u_4) \frac{1}{81h^4} 3h = 0 \Bigg/ \cdot \frac{27h^3}{2}$$

$$(u_0 - 3hu'_0 - u_1) + 81(u_0 - hu'_0 - u_2) + 81(u_0 + hu'_0 - u_3) + (u_0 + 3hu'_0 - u_4) = 0 \\ - (u_0 - 3hu'_0 - u_1) - 27(u_0 - hu'_0 - u_2) + 27(u_0 + hu'_0 - u_3) + (u_0 + 3hu'_0 - u_4) = 0$$

Rozwiązanie układu równań

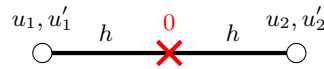
$$164u_0 - u_1 - 81u_2 - 81u_3 - u_4 = 0$$

$$60hu'_0 + u_1 + 27u_2 - 27u_3 - u_4 = 0$$

$$u_0 = \frac{u_1 + 81u_2 + 81u_3 + u_4}{164}$$

$$u'_0 = \frac{-u_1 - 27u_2 + 27u_3 + u_4}{60h}$$

- Przykład 16



Założenia: $p = 1, m = 1, n_0 = 2, n_1 = 2$

Szukane: u_0 i u'_0

Rozwinięcie w szereg Taylora wartości funkcji w węzłach względem u_0

$$\bar{u}_1 = u_0 - hu'_0, \quad s = 0$$

$$\bar{u}_2 = u_0 + hu'_0, \quad s = 0$$

$$\bar{u}'_1 = u'_0, \quad s = 1$$

$$\bar{u}'_2 = u'_0, \quad s = 1$$

Budowa funkcji błędu

$$J = (\bar{u}_1 - u_1)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-0}} \right)^2 + (\bar{u}_2 - u_2)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-0}} \right)^2 +$$

$$+ (\bar{u}'_1 - u'_1)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-1}} \right)^2 + (\bar{u}'_2 - u'_2)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-1}} \right)^2$$

$$J = (u_0 - hu'_0 - u_1)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + (u_0 + hu'_0 - u_2)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + (u'_0 - u'_1)^2 \left(\frac{1}{h} \right)^2 + (u'_0 - u'_2)^2 \left(\frac{1}{h} \right)^2$$

Minimalizacja funkcji błędu

$$\frac{\partial J}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u'_0} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial u_0} = 2(u_0 - hu'_0 - u_1) \frac{1}{h^4} + 2(u_0 + hu'_0 - u_2) \frac{1}{h^4} = 0 \Big/ \cdot \frac{h^4}{2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u'_0} = 2(u_0 - hu'_0 - u_1) \frac{1}{h^4} (-h) + 2(u_0 + hu'_0 - u_2) \frac{1}{h^4} h +$$

$$+ 2(u'_0 - u'_1) \frac{1}{h^2} + 2(u'_0 - u'_2) \frac{1}{h^2} = 0 \Big/ \cdot \frac{h^3}{2}$$

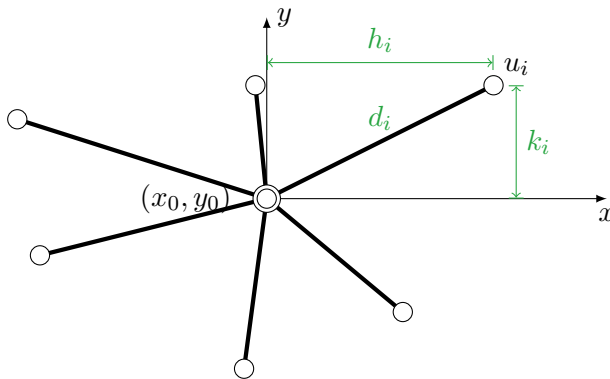
$$\begin{aligned}
 (u_0 - hu'_0 - u_1) + (u_0 + hu'_0 - u_2) &= 0 \\
 -(u_0 - hu'_0 - u_1) + (u_0 + hu'_0 - u_2) + h(u'_0 - u'_1) + h(u'_0 - u'_2) &= 0
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\begin{aligned}
 2u_0 - u_1 - u_2 &= 0 \\
 4hu'_0 + u_1 - u_2 - hu'_1 - hu'_2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{u_1 + u_2}{2} \\
 u'_0 &= \frac{-u_1 + u_2 + hu'_1 + hu'_2}{4h}
 \end{aligned}$$

Aproksymacja MWLS - 2D



Funkcja wagowa

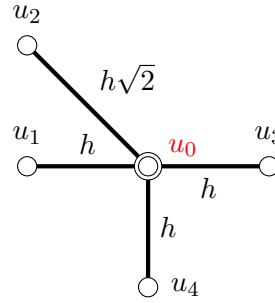
$$\omega(d) = \frac{1}{d^{1+p-s+\varepsilon}} = \frac{1}{(\sqrt{h^2+k^2})^{1+p-s+\varepsilon}}$$

Aproksymacja lokalna 2D

$$u(x, y, x_0, y_0) = \underbrace{u_0}_{p=0} + \underbrace{h \frac{du}{dx} \Big|_0 + k \frac{du}{dy} \Big|_0}_{p=1} + \underbrace{\frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_0 + kh \frac{d^2u}{dx dy} \Big|_0 + \frac{k^2}{2} \frac{d^2u}{dy^2} \Big|_0}_{p=2} + \dots$$

$$h = x - x_0, \quad k = y - y_0$$

- Przykład 17



Założenia: $p = 1$, $m = 0$, $n_0 = 4$

Szukane: $u_{0,x}$, i $u_{0,y}$,

Rozwinięcie w szereg Taylora wartości funkcji w węzłach względem u_0

$$\bar{u}_1 = u_0 - h u_{0,x}$$

$$\bar{u}_2 = u_0 - h u_{0,x} + h u_{0,y}$$

$$\bar{u}_3 = u_0 + h u_{0,x}$$

$$\bar{u}_4 = u_0 - h u_{0,y}$$

Budowa funkcji błędu

$$J = (\bar{u}_1 - u_1)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-0}} \right)^2 + (\bar{u}_2 - u_2)^2 \left(\frac{1}{(h\sqrt{2})^{1+1-0}} \right)^2 +$$

$$+ (\bar{u}_3 - u_3)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-0}} \right)^2 + (\bar{u}_4 - u_4)^2 \left(\frac{1}{h^{1+1-0}} \right)^2$$

$$J = (u_0 - h u_{0,x} - u_1)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + (u_0 - h u_{0,x} + h u_{0,y} - u_2)^2 \left(\frac{1}{2h^2} \right)^2 +$$

$$+ (u_0 + h u_{0,x} - u_3)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2 + (u_0 - h u_{0,y} - u_4)^2 \left(\frac{1}{h^2} \right)^2$$

Minimalizacja funkcji błędu

$$\frac{\partial J}{\partial u_{0,x}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_{0,y}} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_{0,x}} &= 2(u_0 - hu_{0,x} - u_1) \frac{1}{h^4}(-h) + 2(u_0 - hu_{0,x} + hu_{0,y} - u_2) \frac{1}{4h^4}(-h) + \\ &\quad + 2(u_0 + hu_{0,x} - u_3) \frac{1}{h^4}h = 0 \Big/ \cdot 2h^3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u_{0,y}} = 2(u_0 - hu_{0,x} + hu_{0,y} - u_2) \frac{1}{4h^4}h + 2(u_0 - hu_{0,y} - u_4) \frac{1}{h^4}(-h) = 0 \Big/ \cdot 2h^3$$

$$\begin{aligned} -4(u_0 - hu_{0,x} - u_1) - (u_0 - hu_{0,x} + hu_{0,y} - u_2) + 4(u_0 + hu_{0,x} - u_3) &= 0 \\ (u_0 - hu_{0,x} + hu_{0,y} - u_2) - 4(u_0 - hu_{0,y} - u_4) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań

$$9hu_{0,x} - hu_{0,y} = u_0 - 4u_1 - u_2 + 4u_3$$

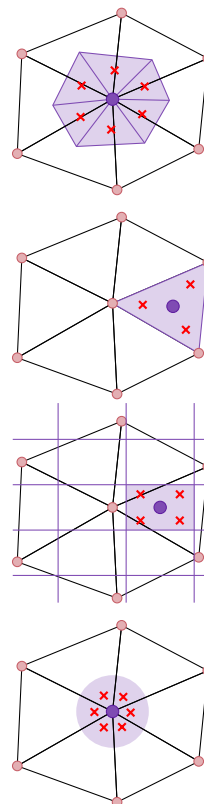
$$-hu_{0,x} + 5hu_{0,y} = 3u_0 + u_2 - 4u_4$$

$$u_{0,x} = \frac{2u_0 - 5u_1 - u_2 + 5u_3 - u_4}{11h}$$

$$u_{0,y} = \frac{7u_0 - u_1 + 2u_2 + u_3 - 9u_4}{11h}$$

5.8. Całkowanie w BMRS (dotyczy wariacyjnej wersji metody)

- całkowanie **dookoła węzła** po wielokątach Voronoi (najlepsze dla parzystych operatorów)
- całkowanie **między węzłami** po trójkątach Delaunaya (najlepsze dla nieparzystych operatorów)
- całkowanie **po siatce tła** niezależnej od węzłów
- całkowanie **po strefach wpływu** funkcji wagowych aproksymacji MWLS



× punkt Gaussa

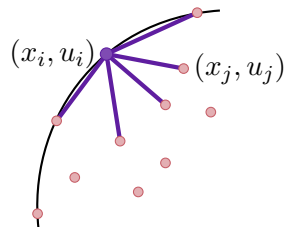
● węzeł

● punkt centralny

5.9. Uwzględnienie warunków brzegowych

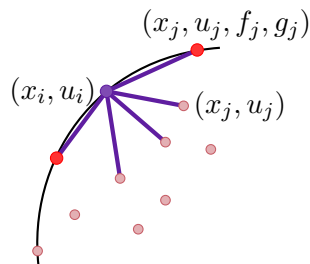
- użycie jedynie **wewnętrznych węzłów**
- słaba jakość

$$u_i = \sum_{j=1}^m a_j u_j$$



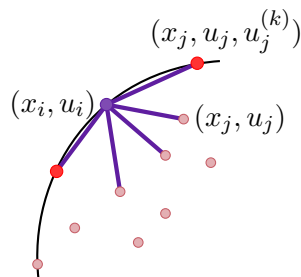
- użycie **węzłów wewnętrznych**
z warunkiem brzegowym i równaniem
z obszaru zapisanym na brzegu

$$\mathcal{L}u_i = f_i, \quad \mathcal{G}u_i = g_i, \quad P_i \in \partial\Omega$$



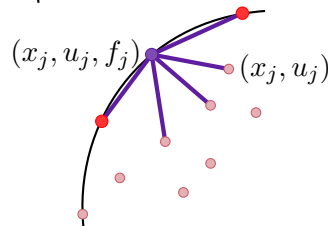
- użycie **węzłów wewnętrznych**
i uogólnionych stopni swobody

$$u_i = \sum_{j=1}^{m_1} a_j u_j + \sum_{j=1}^{m_2} b_j u_j^{(k)}$$



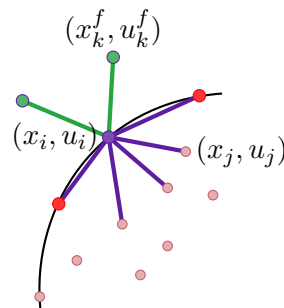
- podjęcie wielopunktowe**

$$\sum_{j=1}^{m_1} a_j u_j = \sum_{j=1}^{m_2} b_j f_j$$



- użycie **węzłów wewnętrznych**
i dodatkowych **węzłów zewnętrznych**
(fikcyjnych)

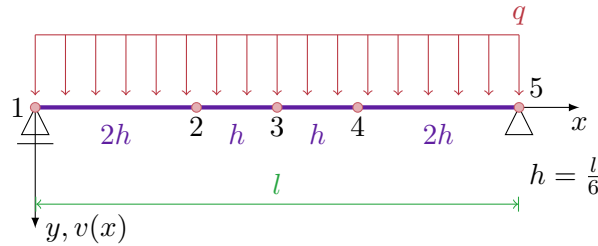
$$u_i = \sum_{j=1}^{m_1} a_j u_j + \sum_{k=1}^{m_2} b_k u_k^f$$



- kombinacje powyższych sposobów

5.10. Zastosowanie BMRS

- Zginanie belki swobodnie podpartej (BMRS lokalny)- Przykład 18



sformułowanie lokalne

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx(l-x)$$

Wzory dla węzła 2

$$v'_2 = \frac{-46v_1 - 171v_2 + 224v_3 - 6v_4 - v_5}{300h}$$

$$v''_2 = \frac{419v_1 - 1056v_2 + 464v_3 + 159v_4 + 14v_5}{1500h^2}$$

Wzory dla węzła 3

$$v'_3 = \frac{-v_1 - 243v_2 + 243v_4 + v_5}{492h}$$

$$v''_3 = \frac{v_1 + 81v_2 - 164v_3 + 81v_4 + v_5}{90h^2}$$

Układ równań

$$v_1 = 0$$

$$\frac{419v_1 - 1056v_2 + 464v_3 + 159v_4 + 14v_5}{1500(\frac{l}{6})^2} = -\frac{5}{72} \frac{ql^2}{EI}$$

$$\frac{v_1 + 81v_2 - 164v_3 + 81v_4 + v_5}{90(\frac{l}{6})^2} = -\frac{1}{8} \frac{ql^2}{EI}$$

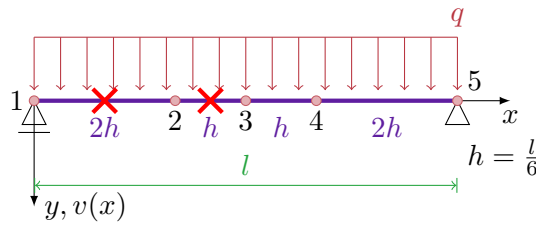
$$v_4 = v_2$$

$$v_5 = 0$$

Rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0.0086 \frac{ql^4}{EI} \\ v_3 = 0.0104 \frac{ql^4}{EI} \\ v_4 = 0.0086 \frac{ql^4}{EI} \\ v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_2 = 0.0162 \frac{ql^3}{EI} \\ v'_3 = 0 \\ v'_4 = -0.0162 \frac{ql^3}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v''_2 = -0.0694 \frac{ql^2}{EI} \\ v''_3 = -0.1250 \frac{ql^2}{EI} \\ v''_4 = -0.0694 \frac{ql^2}{EI} \end{cases}$$

- Zginanie belki swobodnie podpartej (BMRS wariacyjny) - Przykład 19



sformułowanie wariacyjne

$$-\int_0^l w'v' dx = \int_0^l w f dx$$

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0$$

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0$$

$$f(x) = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{qx(x-l)}{2EI}$$

Różniczkowanie i całkowanie numeryczne

$$-2 \left(\frac{w'_{1-2}}{2h} \cdot \frac{v'_{1-2}}{2h} \cdot 2h + \frac{w'_{2-3}}{h} \cdot \frac{v'_{2-3}}{h} \cdot h \right) = 2 \left(\frac{1}{2} (w_1 f_1 + w_2 f_2) 2h + \frac{1}{2} (w_2 f_2 + w_3 f_3) h \right)$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

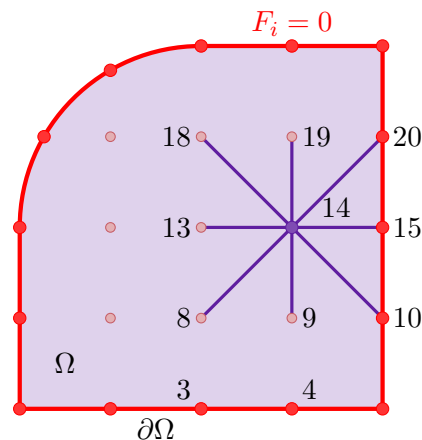
$$-2 \left(\frac{w_2 - \overbrace{w_1}^{=0}}{2h} \cdot \frac{v_2 - \overbrace{v_1}^{=0}}{2h} \cdot 2h + \frac{w_3 - w_2}{h} \cdot \frac{v_3 - v_2}{h} \cdot h \right) = 2 \left(\frac{1}{2} (\overbrace{w_1}^{=0} f_1 + w_2 f_2) 2h + \frac{1}{2} (w_2 f_2 + w_3 f_3) h \right)$$

Układ równań

$$w_2 \left(\frac{v_2}{2h} + \frac{v_3}{h} - \frac{v_2}{h} \right) + w_3 \left(\frac{v_2}{h} - \frac{v_3}{h} \right) = w_2 \left(\frac{1}{2} f_2 2h + \frac{1}{2} f_2 h \right) + w_3 \left(\frac{1}{2} f_3 h \right), \quad \forall w_2, w_3$$

$$\begin{cases} -\frac{3v_2}{2h} + \frac{v_3}{h} = \frac{3}{2} f_2 h \\ \frac{v_2}{h} - \frac{v_3}{h} = \frac{1}{2} f_3 h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_5 = 0 \\ v_2 = v_4 = 0.0093 \frac{ql^4}{EI} \\ v_3 = 0.0110 \frac{ql^4}{EI} \end{cases}$$

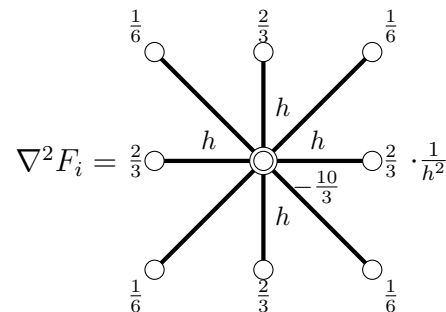
- Zagadnienie 2D (BMRS lokalne) - Przykład 20a (wskazówki)



sformułowanie lokalne

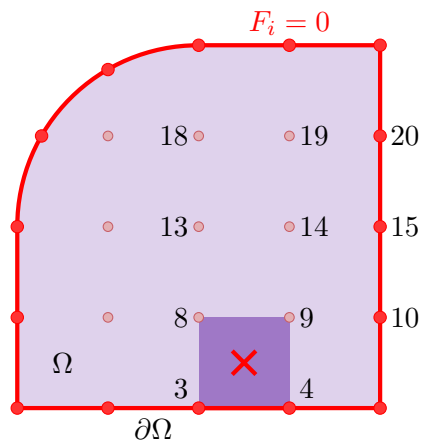
$$\nabla^2 F = F''_{xx} + F''_{yy} = f(x, y)$$

$$F = 0 \text{ na } \partial\Omega$$



$$f_{14} = \left(\frac{1}{6} F_8 + \frac{2}{3} F_9 + \frac{1}{6} F_{10} + \frac{2}{3} F_{13} - \frac{10}{3} F_{14} + \frac{2}{3} F_{15} + \frac{1}{6} F_{18} + \frac{2}{3} F_{19} + \frac{1}{6} F_{20} \right) \frac{1}{h^2}$$

- Zagadnienie 2D (BMRS wariacyjne) - Przykład 20b (wskazówki)



sformułowanie globalne

$$-\int_{\Omega} (w'_x F'_x + w'_y F'_y) d\Omega = \int_{\Omega} w f(x, y) d\Omega$$

$$F = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

$$w = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

$$L = -\left(\frac{\frac{w_4+w_9}{2} - \frac{w_3+w_8}{2}}{h} \frac{F_4+F_9 - \frac{F_3+F_8}{2}}{h} \right) h^2 +$$

$$-\left(\frac{\frac{w_8+w_9}{2} - \frac{w_3+w_4}{2}}{h} \frac{F_8+F_9 - \frac{F_3+F_4}{2}}{h} \right) h^2$$

$$P = \frac{h^2}{4} (w_3 f_3 + w_4 f_4 + w_8 f_8 + w_9 f_9)$$

6. Klasyfikacja metod komputerowych

Nazwa metody	Sformułowanie	Podstawa dyskretyzacji	Sposób dyskretyzacji	Sposób aproksymacji	Całkowanie numeryczne	Opracowanie wyników
Metoda Elementów Skończonych	słabe (wariacyjne/funkcjonal)	obszar	węzły + elementy	interpolacja f. kształtu w elemencie	w elemencie	MES +inne
Metoda Różnic Skończonych	mocne (lokalne)	obszar	węzły	wzory różnicowe	brak	aproksymacja
Wariacyjna MRS	słabe (wariacyjne)	obszar	węzły	wzory różnicowe	dookoła lub pomiędzy węzłami	aproksymacja
Metody bezsiatkowe (BMRS)	mocne / słabe (wariacyjne)	obszar	węzły	metoda MWLS	różne sposoby	MWLS
Metoda Elementów Brzegowych	równanie całkowe	brzeg	elementy	interpolacja brzegowa	na brzegu (całki właściwe i niewłaściwe)	MEB +inne
Metody residualne (Galekin, NK, Kolok.)	słabe (wariacyjne)	brak	brak	kombinacja liniowa f.bazowych	analitycznie	interpolacja
Metoda energetyczna (Ritza)	słabe (funkcjonal)	brak	brak	kombinacja liniowa f.bazowych	analitycznie	interpolacja