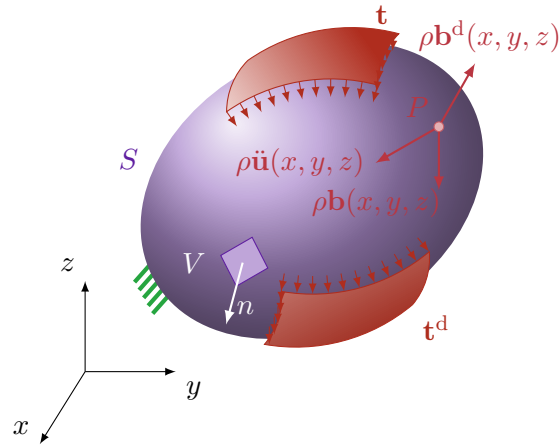


3. Dynamika

3.1. Stan równowagi



Siły

- $\rho \mathbf{b}$ – wektor gęstości sił masowych $[\text{N}/\text{m}^3]$
- $\rho \mathbf{b}^d$ – wektor gęstości sił masowych tłumienia $[\text{N}/\text{m}^3]$
- $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ – wektor gęstości sił bezwładności $[\text{N}/\text{m}^3]$
- $\mathbf{t}$ – wektor gęstości sił powierzchniowych $[\text{N}/\text{m}^2]$
- $\mathbf{t}^d$ – wektor gęstości sił powierzchniowych tłumienia $[\text{N}/\text{m}^2]$

Równanie równowagi ciała

$$\int_S (\mathbf{t} - \mathbf{t}^d) dS + \int_V \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}}) dV = 0$$

Statyczne warunki brzegowe

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}^d = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{m}^T \mathbf{s}$$

Wykorzystując twierdzenie Greena–Gaussa–Ostrogradzkiego

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{L}^T \mathbf{s} dV$$

Równania Naviera

$$\int_V (\mathbf{L}^T \mathbf{s} + \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}})) dV = 0 \iff \mathbf{L}^T \mathbf{s} + \rho (\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall P \in V$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho (b_i - b_i^d - \ddot{u}_i) = 0$$

Sformułowanie słabe – funkcja wagowa $w \cong \delta \mathbf{u}$ – kinematycznie dopuszczalna wariacja przemieszczenia (zgodna z kinematycznymi warunkami brzegowymi – **zasada prac wirtualnych**)

$$\begin{aligned} \int_V (\delta \mathbf{u})^T \left(\mathbf{L}^T \mathbf{s} + \rho \left(\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}} \right) \right) dV &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \\ - \int_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{s} dV + \int_S (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{m}^T \mathbf{s} dS + \int_V (\delta \mathbf{u})^T \rho \left(\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}} \right) dV &= 0 \\ \int_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{s} dV &= \int_S (\delta \mathbf{u})^T \left(\mathbf{t} - \mathbf{t}^d \right) dS + \int_V (\delta \mathbf{u})^T \rho \left(\mathbf{b} - \mathbf{b}^d - \ddot{\mathbf{u}} \right) dV \\ \uparrow & \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{praca sił wewnętrznych} & \qquad \qquad \text{praca sił zewnętrznych} \end{aligned}$$

3.2. Równanie równowagi układu zdyskretyzowanego

Równanie równowagi (**Aproksymacja MES**: $\mathbf{u}^{eh}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{d}}^e(t)$)

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} (\mathbf{L}^e \delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{s}^e dV^e - \int_{S^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \left(\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de} \right) dS^e - \int_{V^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \rho \left(\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e \right) dV^e \right\} &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{V^e} \left(\mathbf{L}^e \mathbf{N}^e \delta \bar{\mathbf{d}}^e \right)^T \mathbf{s}^e dV^e - \int_{S^e} (\mathbf{N}^e \delta \bar{\mathbf{d}}^e)^T \left(\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de} \right) dS^e - \int_{V^e} (\mathbf{N}^e \delta \bar{\mathbf{d}}^e)^T \rho \left(\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e \right) dV^e \right\} &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \left(\mathbf{T}^e \delta \bar{\mathbf{d}}^e \right)^T \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{s}^e dV^e - \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \left(\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de} \right) dS^e - \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \left(\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e \right) dV^e \right\} &= 0 \\ (\delta \mathbf{d})^T \left\{ \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{s}^e dV^e - \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \left(\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de} \right) dS^e - \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \left(\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e \right) dV^e \right\} \right\} &= 0 \\ \delta \mathbf{d} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{s}^e dV^e - \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \left(\mathbf{t}^e - \mathbf{t}^{de} \right) dS^e - \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \left(\mathbf{b}^e - \mathbf{b}^{de} - \ddot{\mathbf{u}}^e \right) dV^e \right\} &= 0 \\ \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{s}^e dV^e \right\} + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \ddot{\mathbf{u}}^e dV^e \right\} + & \\ + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^{de} dS^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{b}^{de} dV^e \right\} = & \\ = \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e dS^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{b}^e dV^e \right\} & \end{aligned}$$

Uwzględnienie związków kinematycznych i konstytutywnych oraz tłumienia

- liniowa sprężystość (zw. konstytutywny) : $\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e}$
- liniowy związek kinematyczny : $\mathbf{e} = \mathbf{L} \mathbf{u}$

$$\mathbf{s}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{L}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{L}^e \mathbf{N}^e \bar{\mathbf{d}}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e \mathbf{T}^e \bar{\mathbf{d}}^e, \quad \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{N}^e \ddot{\bar{\mathbf{d}}}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \ddot{\bar{\mathbf{d}}}^e$$

- lepkie tłumienie :

$$\mathbf{t}^{de} = \mu_d \dot{\mathbf{u}}^e = \mu_d \mathbf{N}^e \dot{\mathbf{d}}^e = \mu_d \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}}, \quad \rho \mathbf{b}^{de} = \mu_b \dot{\mathbf{u}}^e = \mu_b \mathbf{N}^e \dot{\mathbf{d}}^e = \mu_b \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV^e \right\} \mathbf{T}^e \mathbf{d} + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dV^e \right\} \mathbf{T}^e \ddot{\mathbf{d}} + \\ + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mu_d \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dS^e + \int_{V^e} \mu_b \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dV^e \right\} \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}} = \\ = \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e dS^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^{eT} \rho \mathbf{b}^e dV^e \right\} \\ \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e \mathbf{d} + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{M}}^e \mathbf{T}^e \ddot{\mathbf{d}} + \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{C}}^e \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{d}} = \sum_{e=1}^E \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{f}}^e \\ \sum_{e=1}^E \mathbf{K}^e \mathbf{d} + \sum_{e=1}^E \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{d}} + \sum_{e=1}^E \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{d}} = \sum_{e=1}^E \mathbf{f}^e \\ \mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{f} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t)$$

- $\mathbf{M}$ – macierz bezwładności
- $\mathbf{C}$ – macierz tłumienia
- $\mathbf{K}$ – macierz sztywności
- $\mathbf{f}$ – wektor węzłowych obciążeń zewnętrznych

3.3. Drgania własne bez tłumienia

Równanie równowagi

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$$

Aproksymacja

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{d}}^e(t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{d}}_A^e \sin(\omega t + \varphi)$$

- $\mathbf{N}^e$ – macierz funkcji kształtu
- $\bar{\mathbf{d}}_A^e$ – wektor amplitud drgań własnych

- ω – częstość drgań własnych
- φ – przesunięcie fazowe
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
gdzie f , T – odpowiednio częstotliwość, okres drgań własnych

Uwzględnienie oscylacyjnego charakteru drgań – zmiana wartości stopni swobody w czasie

$$\bar{\mathbf{d}}^e(t) = \bar{\mathbf{d}}_A^e \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{d}}}^e(t) = -\omega^2 \bar{\mathbf{d}}_A^e \sin(\omega t + \varphi)$$

po agregacji i podstawieniu do równania równowagi

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d}_A \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{0}$$

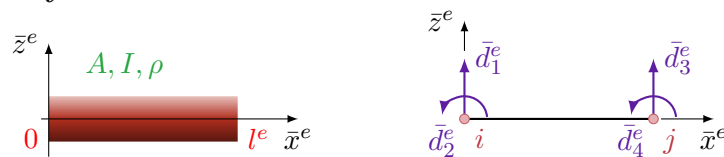
$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d}_A = \mathbf{0} \text{ – problem własny}$$

równanie jest spełnione dla

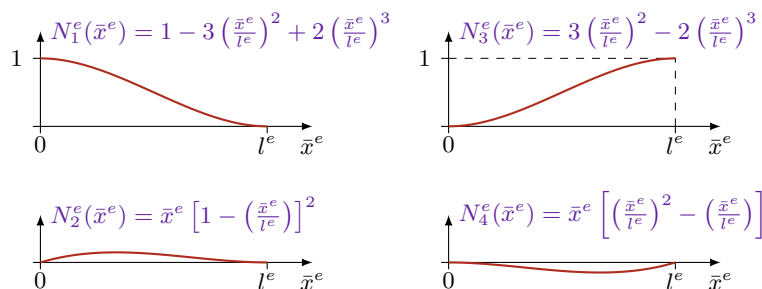
$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \text{ lub } \mathbf{d}_A = \mathbf{0}$$

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

3.4. Element belkowy



Funkcje kształtu $\mathbf{N}^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e \ N_4^e]$



Macierz sztywności

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e d\bar{x}^e$$

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e, \quad \mathbf{L} = \left[-\frac{d^2}{d\bar{x}^{e2}} \right], \quad \mathbf{D}^e = [E^e I^e]$$

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{E^e I^e}{l^{e3}} \begin{bmatrix} 12 & 6l^e & -12 & 6l^e \\ 6l^e & 4l^{e2} & -6l^e & 2l^{e2} \\ -12 & -6l^e & 12 & -6l^e \\ 6l^e & 2l^{e2} & -6l^e & 4l^{e2} \end{bmatrix}$$

Macierz bezwładności

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \int_0^{l^e} \rho A^e \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e d\bar{x}^e$$

$$\mu^e = \rho A^e - \text{masa na jedn. długości [kg/m]}$$

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \frac{\mu^e l^e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l^e & 54 & -13l^e \\ 22l^e & 4l^{e2} & 13l^e & -3l^{e2} \\ 54 & 13l^e & 156 & -22l^e \\ -13l^e & -3l^{e2} & -22l^e & 4l^{e2} \end{bmatrix}$$

3.5. Przykład – wspornik

1. Dane



2. Budowa problemu własnego dla układu

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d}_A = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d_{A1} \\ d_{A2} \\ d_{A3} \\ d_{A4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 \mu l^4}{EI} \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d_{A1} \\ d_{A2} \\ d_{A3} \\ d_{A4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Uwzględnienie warunków brzegowych

$$\left(\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{A3} \\ d_{A4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

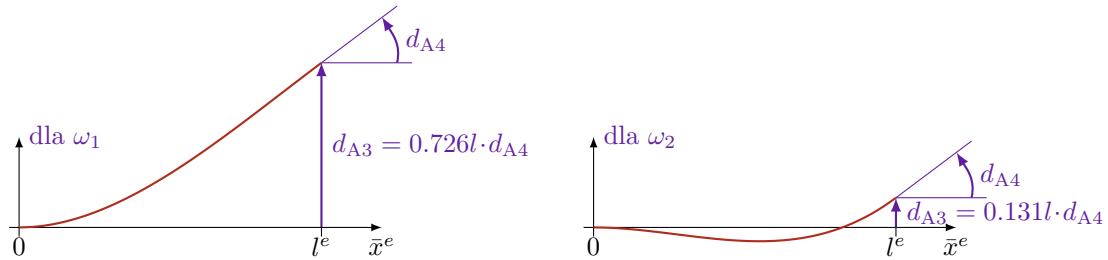
$$\left(\begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d_{A3} \\ d_{A4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Rozwiązanie problemu własnego – częstości drgań własnych

$$\left| \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 12.48 \\ \lambda_2 = 1211.52 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_1 = \frac{3.53}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \\ \omega_2 = \frac{34.81}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \end{matrix}$$

5. Postaci drgań własnych

Formy drgań własnych wyznaczone z jednego z dwóch równań liniowo zależnych po podstawieniu odpowiedniej wartości własnej



3.6. Drgania wymuszone z tłumieniem

Równanie równowagi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t)$$

+ war. pocz. $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0$ oraz $\dot{\mathbf{d}}(0) = \dot{\mathbf{d}}_0$

przyjęte oznaczenia

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t,$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}(t_i), \dot{\mathbf{d}}_i = \dot{\mathbf{d}}(t_i), \ddot{\mathbf{d}}_i = \ddot{\mathbf{d}}(t_i), \mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_i)$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}(t_{i+1}) = \mathbf{d}(t_i + \Delta t), \dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \dot{\mathbf{d}}(t_{i+1}) = \dot{\mathbf{d}}(t_i + \Delta t),$$

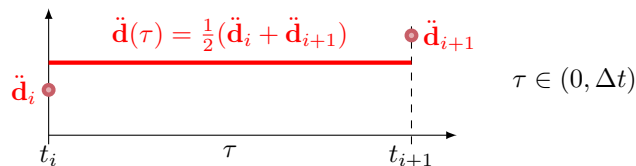
$$\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{d}}(t_{i+1}) = \ddot{\mathbf{d}}(t_i + \Delta t), \mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}(t_{i+1}) = \mathbf{f}(t_i + \Delta t)$$

Równanie równowagi w chwili czasowej t_i i t_{i+1}

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{f}_{i+1}$$

Aproksymacja stała - przyspieszenie uśrednione



$$\ddot{\mathbf{d}}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1}) \Big/ \int d\tau$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = C_1 + \frac{\tau}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1})$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = \dot{\mathbf{d}}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1})$$

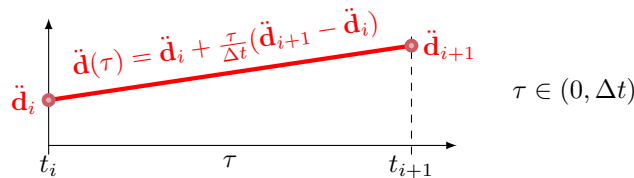
$$\dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \dot{\mathbf{d}}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1})$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = \dot{\mathbf{d}}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1}) \Big/ \int d\tau$$

$$\mathbf{d}(\tau) = C_2 + \dot{\mathbf{d}}_i \tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1})$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1})$$

Aproksymacja liniowa



$$\ddot{\mathbf{d}}(\tau) = \ddot{\mathbf{d}}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{d}}_i) \Big/ \int d\tau$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = C_1 + \ddot{\mathbf{d}}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{d}}_i)$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = \dot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{d}}_i)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \dot{\mathbf{d}}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{d}}_i)$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = \dot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{d}}_i) \Big/ \int d\tau$$

$$\mathbf{d}(\tau) = C_2 + \dot{\mathbf{d}}_i \tau + \ddot{\mathbf{d}}_i \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{d}}_i)$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{\mathbf{d}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6}\ddot{\mathbf{d}}_{i+1}$$

Schemat Newmarka

Uogólnienie aproksymacji

$$\dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \dot{\mathbf{d}}_i + (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \gamma\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} \Delta t$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{d}}_i (\Delta t)^2 + \beta\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} (\Delta t)^2$$

Przypadek uśrednionego przyspieszenia odpowiada $\gamma = \frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{4}$, a przypadek liniowego przyspieszenia odpowiada $\gamma = \frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{6}$

Równanie równowagi w przyrostach $\Delta \ddot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{d}}_i$, $\Delta \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{d}}_{i+1} - \dot{\mathbf{d}}_i$, $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i$, $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_i$

$$\mathbf{M}\Delta \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\Delta \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f}$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \gamma \Delta \ddot{\mathbf{d}} \Delta t$$

$$\Delta \mathbf{d} = \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{d}}_i (\Delta t)^2 + \beta \Delta \ddot{\mathbf{d}} (\Delta t)^2$$

Równanie równowagi w przyroście przyspieszenia

$$\left(\mathbf{M} + \gamma \mathbf{C} \Delta t + \beta \mathbf{K} (\Delta t)^2 \right) \Delta \ddot{\mathbf{d}} = \Delta \mathbf{f} - \ddot{\mathbf{d}}_i \left(\mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \Delta t \right) \Delta t - \mathbf{K} \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t$$

$$\underbrace{\left(\mathbf{M} + \gamma \mathbf{C} \Delta t + \beta \mathbf{K} (\Delta t)^2 \right)}_{\tilde{\mathbf{K}}} \Delta \ddot{\mathbf{d}} = \underbrace{\Delta \mathbf{f} - \ddot{\mathbf{d}}_i \left(\mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \Delta t \right) \Delta t - \mathbf{K} \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t}_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

Algorytm

1. Początek: $t = 0, i = 0$, z warunku początkowego $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}(0), \dot{\mathbf{d}}_0 = \dot{\mathbf{d}}(0), \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(0)$ Obliczamy $\ddot{\mathbf{d}}_0$ z układu równań $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0$
2. Dobieramy Δt i obliczamy : $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{f}}$ oraz $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
3. Obliczamy przyrost przyspieszenia $\Delta \ddot{\mathbf{d}}$ z układu równań $\tilde{\mathbf{K}}\Delta \ddot{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{f}}$ oraz $\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{d}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{d}}$
4. Obliczamy przyrost prędkości $\Delta \dot{\mathbf{d}}$ z równania $\Delta \dot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \gamma \Delta \ddot{\mathbf{d}} \Delta t$ oraz $\dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \dot{\mathbf{d}}_i + \Delta \dot{\mathbf{d}}$
5. Obliczamy przyrost przemieszczenia $\Delta \mathbf{d}$ z równania $\Delta \mathbf{d} = \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{d}}_i (\Delta t)^2 + \beta \Delta \ddot{\mathbf{d}} (\Delta t)^2$ oraz $\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \Delta \mathbf{d}$
6. Zaczynamy nowy krok czasowy i przechodzimy do pkt. 2.

Równanie równowagi w przyroście przemieszczenia

$$\Delta \mathbf{d} = \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{d}}_i (\Delta t)^2 + \beta \Delta \ddot{\mathbf{d}} (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta \ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta \mathbf{d} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{d}}_i$$

$$\Delta \dot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}}_i \Delta t + \gamma \Delta \ddot{\mathbf{d}} \Delta t \Rightarrow \Delta \dot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}}_i \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{d} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{d}}_i$$

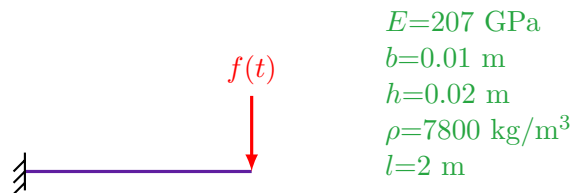
$$\mathbf{M}\Delta \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\Delta \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f}$$

$$\underbrace{\left(\mathbf{K} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta (\Delta t)^2} \right)}_{\hat{\mathbf{K}}} \Delta \mathbf{d} = \underbrace{\Delta \mathbf{f} + \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta} \right) \dot{\mathbf{d}}_i + \left(\frac{\mathbf{M}}{2\beta} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{C} \Delta t \right) \ddot{\mathbf{d}}_i}_{\hat{\mathbf{f}}}$$

Algorytm

1. Początek: $t = 0, i = 0$, z warunku początkowego $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}(0), \dot{\mathbf{d}}_0 = \dot{\mathbf{d}}(0), \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(0)$ Obliczamy $\ddot{\mathbf{d}}_0$ z układu równań $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0$
2. Dobieramy Δt i obliczamy : $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{f}}$ oraz $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
3. Obliczamy przyrost przemieszczenia $\Delta \mathbf{d}$ z układu równań $\hat{\mathbf{K}}\Delta \mathbf{d} = \hat{\mathbf{f}}$ oraz $\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \Delta \mathbf{d}$
4. Obliczamy przyrost przyspieszenia $\Delta \ddot{\mathbf{d}}$ z równania $\Delta \ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta \mathbf{d} - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{d}}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{d}}_i$ oraz $\ddot{\mathbf{d}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{d}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{d}}$
5. Obliczamy przyrost prędkości $\Delta \dot{\mathbf{d}}$ z równania $\Delta \dot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}}_i\Delta t + \gamma\Delta \ddot{\mathbf{d}}\Delta t$ oraz $\dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \dot{\mathbf{d}}_i + \Delta \dot{\mathbf{d}}$
6. Zaczynamy nowy krok czasowy i przechodzimy do pkt. 2.

3.7. Przykład



Obciążenie dynamiczne

- harmoniczne $f(t) = 100 \sin\left(\frac{3}{2}\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$
- impulsowe $f(t) = \begin{cases} 100 & \text{dla } t \in (0, 0.0001) \\ 0 & \text{dla } t > 0.0001 \end{cases}$
- rosnące liniowo $f(t) = 100t$

Przykładowy zrzut z ekranu z aplikacji matlaba

