

1. Rozwiązanie problemu brzegowego Metodą Elementów Skończonych

1.1. Metoda residuów ważonych dla zagadnienia 1D (słabe sformułowanie Bubnowa-Galerkina)

Sformułowanie silne - model lokalny

$$Au''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = D(x)$$

+ (przykładowe) warunki brzegowe

- $u(x_a) = \hat{a}$ – podstawowy warunek brzegowy (Dirichleta)
- $u'(x_b) = \hat{b}$ – naturalny warunek brzegowy (Neumanna)

Aproksymacja funkcji

$$u^h = \Phi \alpha$$

Residuum

$$R(x) = Au^{h''}(x) + B(x)u^{h'}(x) + C(x)u^h(x) - D(x)$$

Minimalizacja residuum

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)R(x)dx = 0, \quad \forall w \neq 0$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x) \left(Au^{h''}(x) + B(x)u^{h'}(x) + C(x)u^h(x) - D(x) \right) dx = 0$$

Podział metod residuów ważonych ze względu na funkcję wagową $w(x)$

- metoda kollokacji – $w_i = \delta(x - x_i)$
- metoda najmniejszych kwadratów – $w_i = \frac{dR}{d\alpha_i}$
- metoda Bubnowa-Galerkina – $w_i = \Phi_i$

Słabe sformułowanie - model globalny ($\forall w \neq 0$)

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x) \left(Au^{h''}(x) + B(x)u^{h'}(x) + C(x)u^h(x) - D(x) \right) dx = 0$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x)Au^{h''}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x)B(x)u^{h'}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)u^h(x)dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)dx = 0$$

$$w(x)Au^{h'}(x)\Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Au^{h'}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x)B(x)u^{h'}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)u^h(x)dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)dx = 0$$

$$\begin{aligned} & \widehat{b} \\ & w(x_b)A \boxed{u^{h'}(x_b)} - w(x_a)Au^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Au^{h'}(x)dx + \\ & + \int_{x_a}^{x_b} w(x)B(x)u^{h'}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)u^h(x)dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)dx = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{w(x_b)A\widehat{b}} - w(x_a)Au^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x)Au^{h'}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x)B(x)u^{h'}(x)dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x)C(x)u^h(x)dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x)D(x)dx = 0$$

$$\boxed{L(u^h, w)} - \boxed{l(w)} = 0$$

$$\sum_E \left(L(u^{eh}, w^e) - l(w^e) \right) = 0$$

+ podstawowy warunek brzegowy

- $u(x_a) = \widehat{a}$

1.2. Wybór funkcji aproksymujących

Zagadnienie 1D

Aproksymacja liniowa

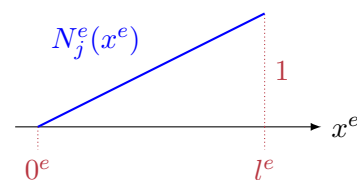
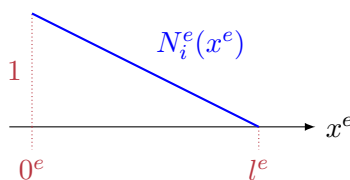
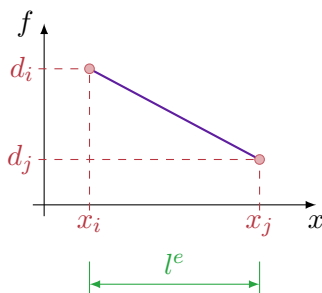
$$u^e(x) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x = \mathbf{\Phi} \mathbf{\alpha}^e$$

$$\mathbf{\Phi} = [1 \ x], \quad \mathbf{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix}$$

$$u^e(x) = N_i^e(x^e)d_i + N_j^e(x^e)d_j = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e$$

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e) \ N_j^e(x^e)], \quad \mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$$



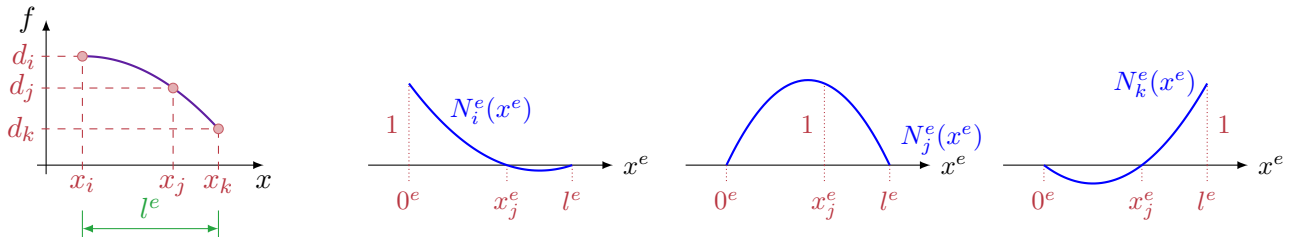
Aproksymacja kwadratowa

$$u^e(x) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e x^2 = \mathbf{\Phi} \mathbf{\alpha}^e$$

$$\mathbf{\Phi} = [1 \ x \ x^2], \quad \mathbf{\alpha}^e = \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \\ \alpha_3^e \end{bmatrix}$$

$$u^e(x) = N_i^e(x^e)d_i + N_j^e(x^e)d_j + N_k^e(x^e)d_k = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e$$

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e) \ N_j^e(x^e) \ N_k^e(x^e)], \quad \mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{bmatrix}$$

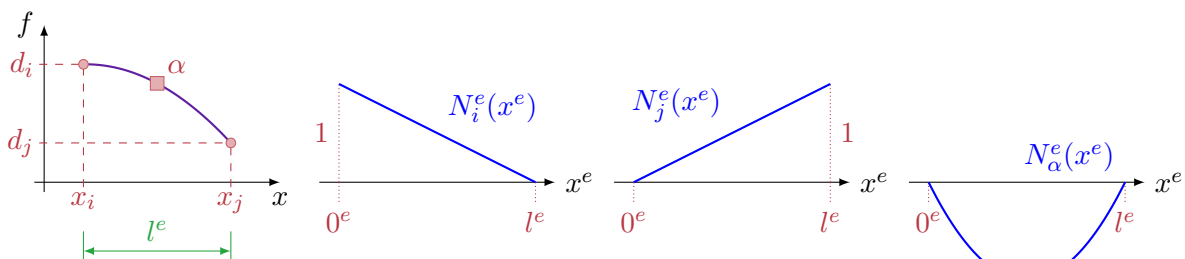


Aproksymacja kwadratowa - hierarchiczne funkcje kształtu

$$u^e(x) = N_i^e(x^e)d_i + N_j^e(x^e)d_j + N_\alpha^e(x^e)\alpha = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e$$

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e) \ N_j^e(x^e) \ N_\alpha^e(x^e)], \quad \mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^e = \left[1 - \frac{x^e}{l^e} \quad \frac{x^e}{l^e} \quad x^e(x^e - l^e) \right]$$

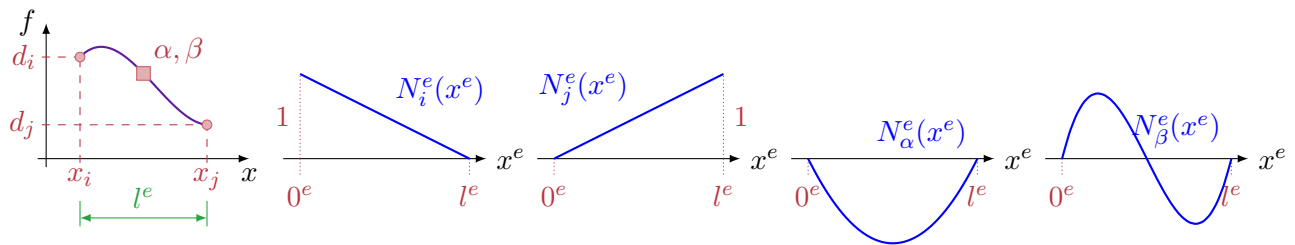


Aproksymacja kubiczna - hierarchiczne funkcje kształtu

$$u^e(x) = N_i^e(x^e)d_i + N_j^e(x^e)d_j + N_\alpha^e(x^e)\alpha + N_\beta^e(x^e)\beta = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e$$

$$\mathbf{N}^e = [N_i^e(x^e) \ N_j^e(x^e) \ N_\alpha^e(x^e) \ N_\beta^e(x^e)], \quad \mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^e = \left[1 - \frac{x^e}{l^e} \quad \frac{x^e}{l^e} \quad x^e(x^e - l^e) \quad x^e(x^e - l^e)(2x^e - l^e) \right]$$



1.3. Przykład

1.3.1. Wyprowadzenie równania w sformułowaniu słabym dla zagadnienia 1D

Sformułowanie silne

$$u'' - x = 0$$

+ warunki brzegowe

$$u'(0) = \frac{1}{2}$$

$$u(2) = 1$$

Sformułowanie słabe

$$\int_0^2 w [u'' - x] dx = 0$$

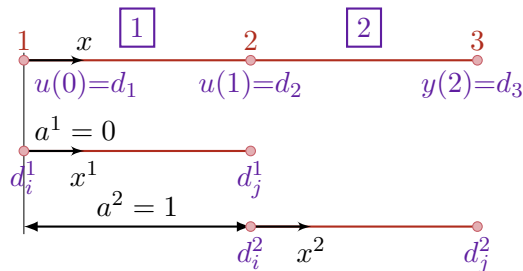
$$- \int_0^2 w' u' dx + w(2)u'(2) - w(0)u'(0) - \int_0^2 wx dx = 0$$

$$\int_0^2 w' u' dx - w(2)u'(2) = -w(0) \cdot \frac{1}{2} - \int_0^2 wx dx$$

$$L(w, u) = l(w)$$

+ warunek brzegowy $u(2) = 1$

1.3.2. Rozwiązanie MES dla zagadnienia 1D - aproksymacja liniowa



Równanie dla ES ($x = x^e + a^e$)

$$\int_0^{l^e} w^e [u^{e''} - (x^e + a^e)] dx^e = 0$$

$$\int_0^{l^e} w^e u^{e''} dx^e - \int_0^{l^e} w^e (x^e + a^e) dx^e = 0$$

$$-\int_0^{l^e} w^{e'} u^{e'} dx^e + (w^e u^{e'}) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} w^e (x^e + a^e) dx^e = 0$$

Aproksymacja

$$u^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e, \quad w^e = \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT}, \quad \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$$

$$-\int_0^{l^e} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} \mathbf{d}^e dx^e + \left(\mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e = 0$$

$$-\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} dx^e \mathbf{d}^e + \left(\mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e = 0$$

$$\underbrace{\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} dx^e}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{d}^e = \underbrace{\left(\mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e}}_{\mathbf{f}_b^e} - \underbrace{\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e}_{\mathbf{f}^e}$$

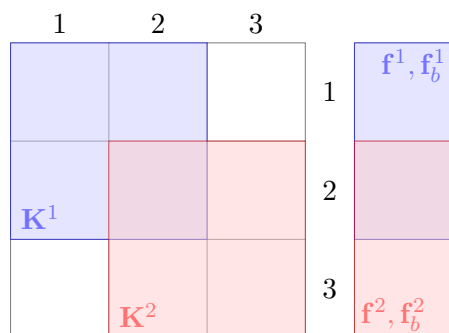
Macierze i wektory z równania MES – dwa ES $\Rightarrow l^e = 1$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{l^e} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} \\ \frac{1}{l^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{l^e} \end{bmatrix} dx^e = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_b^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} \\ \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix} u^{e'} \Big|_0^{l^e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{e'}(l^e) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u^{e'}(0^e) = \begin{bmatrix} -u^{e'}(0^e) \\ u^{e'}(l^e) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^e = \int_0^{l^e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} \\ \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix} (x^e + a^e) dx^e = \frac{l^e}{6} \begin{bmatrix} l^e + 3a^e \\ 2l^e + 3a^e \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{f}^1 \stackrel{a^1=0}{=} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^2 \stackrel{a^2=1}{=} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Agregacja



Globalne równanie MES

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -u^{1'}(0^1) = -u'(0) \\ u^{1'}(l^1) - u^{2'}(0^2) = 0 \\ u^{2'}(l^2) = u'(2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_b} - \underbrace{\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ u'(2) \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \color{red}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ u'(2) \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $d_1 = -\frac{4}{3}$, $d_2 = -\frac{2}{3}$, $u'(2) = 2.5$

Funkcja $u(x^e)$ dla dwóch ES zapisana w układach lokalnych elementów

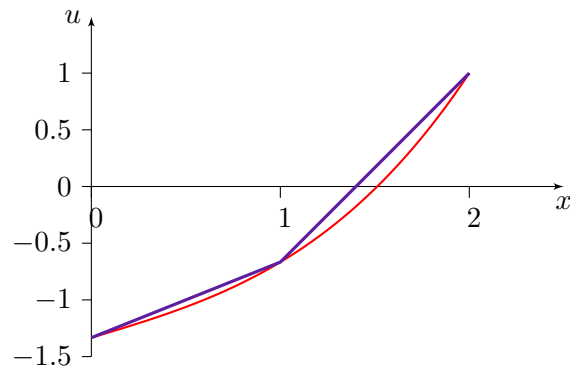
$$u(x^{(1)}) = -\frac{4}{3}(1 - x^{(1)}) - \frac{2}{3}x^{(1)}$$

$$u(x^{(2)}) = -\frac{2}{3}(1 - x^{(2)}) + 1x^{(2)}$$

Funkcja $u(x)$ dla dwóch ES zapisana w układzie globalnym ($x^e = x - a^e$)

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$\color{red}{u_{por} = u_{dok} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}}$$



Estymacja błędu a-posterior (po fakcie)

Estymator błędu

$$e^e(x^e) = |u_{h,p}^e(x^e) - u_{por}^e(x^e)|$$

gdzie e – element, $u_{h,p}^e$ – rozwiązanie MES, h – moduł siatki, p – rząd aproksymacji u_{por}^e – rozwiązanie ścisłe lub odniesienia.

Wskaźnik (indykator błędu)

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{|I|} \sum_e L(e, e)}$$

Estymator błędu (Obliczenia względem lokalnego układu współrzędnych każdego ES ($x = x^e + a^e$))

Element 1

$$e^1 = \left| -\frac{4}{3}(1 - x^{(1)}) - \frac{2}{3}x^{(1)} - \frac{1}{6}x^{(1)3} - \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^1 = \left| -\frac{1}{6}x^{(1)3} + \frac{1}{6}x^{(1)} \right|$$

Element 2

$$e^2 = \left| -\frac{2}{3}(1 - x^{(2)}) + x^{(2)} - \frac{1}{6}(x^{(2)} + 1)^3 - \frac{1}{2}(x^{(2)} + 1) + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^2 = \left| -\frac{1}{6}x^{(2)3} - \frac{1}{2}x^{(2)2} + \frac{2}{3}x^{(2)} \right|$$

Wskaźnik (indykator błędu) dla dwóch ES

$$L(e, e) = \int_{l^e} \left(\frac{de^e}{dx^e} \right)^2 dx^e$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left| -\frac{1}{6}x^{(1)3} + \frac{1}{6}x^{(1)} \right|'^2 dx^{(1)} + \int_0^1 \left| -\frac{1}{6}x^{(2)3} - \frac{1}{2}x^{(2)2} + \frac{2}{3}x^{(2)} \right|'^2 dx^{(2)} \right)} = 0.3249$$

Estymator błędu (Obliczenia względem globalnego układu współrzędnych)

Element 1

$$e^1 = \left| -\frac{4}{3}(1 - x) - \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^1 = \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x \right|$$

Element 2

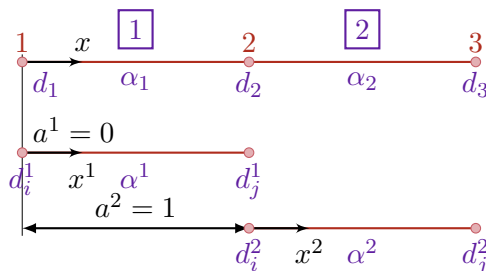
$$e^2 = \left| -\frac{2}{3}(2 - x) + (x - 1) - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^2 = \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{6}x - 1 \right|$$

Wskaźnik (indykator błędu) dla dwóch ES

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x \right|'^2 dx + \int_1^2 \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{6}x - 1 \right|'^2 dx \right)} = 0.3249$$

1.3.3. Rozwiązanie MES dla zagadnienia 1D - aproksymacja kwadratowa z hierarchicznymi funkcjami kształtu



Równanie dla ES ($x = x^e + a^e$)

$$\begin{aligned} \int_0^{l^e} w^e [u^{e''} - (x^e + a^e)] dx^e &= 0 \\ \int_0^{l^e} w^e u^{e''} dx^e - \int_0^{l^e} w^e (x^e + a^e) dx^e &= 0 \\ - \int_0^{l^e} w^{e'} u^{e'} dx^e + (w^e u^{e'}) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} w^e (x^e + a^e) dx^e &= 0 \end{aligned}$$

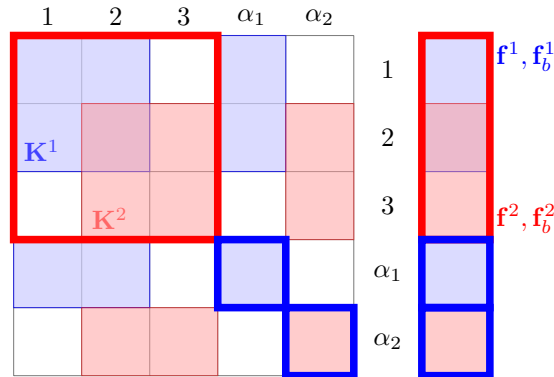
Aproksymacja

$$\begin{aligned} u^e &= \mathbf{N}^e \{d_i^e \ d_j^e \ \alpha^e\}, \quad w^e = \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} \quad \mathbf{N}^e = \left[1 - \frac{x^e}{l^e} \quad \frac{x^e}{l^e} \quad x^e(x^e - l^e) \right] \\ - \int_0^{l^e} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} \mathbf{d}^e dx^e + \left(\mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e &= 0 \\ - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} dx^e \mathbf{d}^e + \left(\mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e &= 0 \\ \underbrace{\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} dx^e}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{d}^e &= \underbrace{\left(\mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e}}_{\mathbf{f}_b^e} - \underbrace{\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e}_{\mathbf{f}^e} \end{aligned}$$

Macierze i wektory z równania MES – dwa ES $\implies l^e = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_0^{l^e} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} \\ \frac{1}{l^e} \\ 2x^e - l^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{l^e} & 2x^e - l^e \end{bmatrix} dx^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_b^e &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} \\ \frac{x^e}{l^e} \\ x^e(x^e - l^e) \end{bmatrix} u^{e'} \Big|_0^{l^e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u^{e'}(l^e) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^{e'}(0^e) = \begin{bmatrix} -u^{e'}(0^e) \\ u^{e'}(l^e) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^e &= \int_0^{l^e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} \\ \frac{x^e}{l^e} \\ x^e(x^e - l^e) \end{bmatrix} (x^e + a^e) dx^e = \frac{l^e}{12} \begin{bmatrix} 2l^e + 6a^e \\ 4l^e + 6a^e \\ -l^{e3} - 2l^{e2}a^e \end{bmatrix} \implies \begin{matrix} \mathbf{f}^1 \stackrel{a^1=0}{=} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^2 \stackrel{a^2=1}{=} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

Agregacja



Globalne równanie MES

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u^{11}(0^1) = -u'(0) \\ u^{1'}(l^1) - u^{2'}(0^2) = 0 \\ u^{2'}(l^2) = u'(2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 10 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$ $\mathbf{d}$ $\mathbf{f}_b$ $\mathbf{f}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ u'(2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 10 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ u'(2) \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{3}\alpha_1 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3}\alpha_2 = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Rozwiązanie: $d_1 = -\frac{4}{3}$, $d_2 = -\frac{2}{3}$, $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$, $u'(2) = 2.5$ Funkcja $u(x^e)$ dla dwóch ES zapisana w układach lokalnych elementów

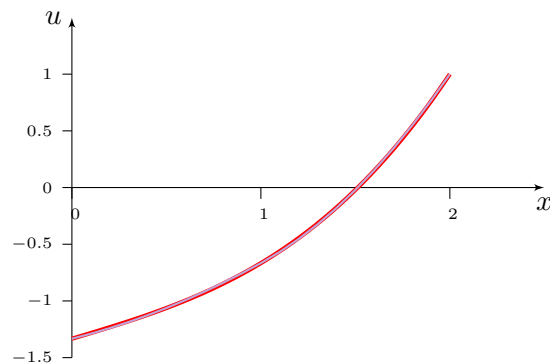
$$u(x^{(1)}) = -\frac{4}{3}(1 - x^{(1)}) - \frac{2}{3}x^{(1)} + \frac{1}{4}x^{(1)}(x^{(1)} - 1)$$

$$u(x^{(2)}) = -\frac{2}{3}(1 - x^{(2)}) + 1x^{(2)} + \frac{3}{4}x^{(2)}(x^{(2)} - 1)$$

Funkcja $u(x)$ dla dwóch ES zapisana w układzie globalnym ($x^e = x - a^e$)

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{4}{3} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{12}x - \frac{5}{6} & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$u_{por} = u_{dok} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$$



Estymator błędu (Obliczenia względem lokalnego układu współrzędnych każdego ES ($x = x^e + a^e$))

Element 1

$$e^1 = \left| -\frac{4}{3}(1 - x^{(1)}) - \frac{2}{3}x^{(1)} + \frac{1}{4}(x^{(1)}(x^{(1)} - 1)) - \frac{1}{6}x^{(1)^3} - \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^1 = \left| -\frac{1}{6}x^{(1)^3} + \frac{1}{4}x^{(1)^2} - \frac{1}{12}x^{(1)} \right|$$

Element 2

$$e^2 = \left| -\frac{2}{3}(1 - x^{(2)}) + x^{(2)} + \frac{3}{4}(x^{(2)}(x^{(2)} - 1)) - \frac{1}{6}(x^{(2)} + 1)^3 - \frac{1}{2}(x^{(2)} + 1) + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^2 = \left| -\frac{1}{6}x^{(2)^3} - \frac{1}{2}x^{(2)^2} + \frac{2}{3}x^{(2)} \right|$$

Wskaźnik (indykator błędu) dla dwóch ES

$$L(e, e) = \int_{l^e} \left(\frac{de^e}{dx^e} \right)^2 dx^e$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left| -\frac{1}{6}x^{(1)^3} + \frac{1}{4}x^{(1)^2} - \frac{1}{12}x^{(1)} \right|^2 dx^{(1)} + \int_0^1 \left| -\frac{1}{6}x^{(2)^3} - \frac{1}{2}x^{(2)^2} + \frac{2}{3}x^{(2)} \right|^2 dx^{(2)} \right)} = 0.0373$$

Estymator błędu (Obliczenia względem globalnego układu współrzędnych)

Element 1

$$e^1 = \left| \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{4}{3} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^1 = \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x \right|$$

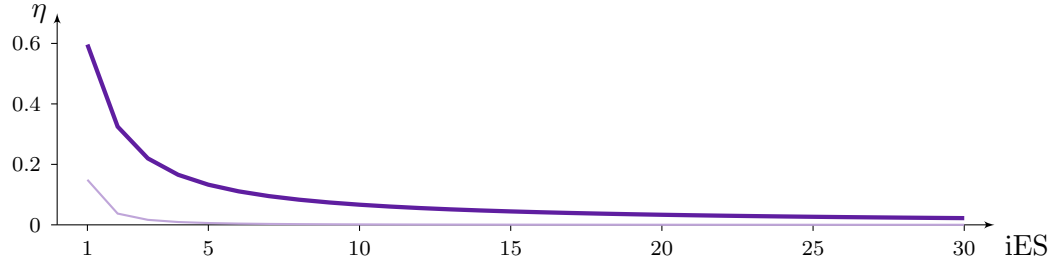
Element 2

$$e^2 = \left| \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{12}x - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \right|$$

$$e^2 = \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{12}x + \frac{1}{2} \right|$$

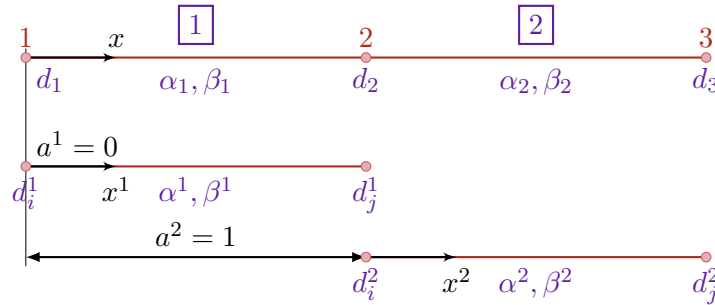
Wskaźnik (indykator błędu) dla dwóch ES

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x \right|^2 dx + \int_1^2 \left| -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{12}x + \frac{1}{2} \right|^2 dx \right)} = 0.0373$$



iES	η - lin.	η - kwad.
1	0.5963	0.1491
2	0.3249	0.0373
5	0.1328	0.0059
10	0.0666	0.0015
15	0.0444	0.0007
20	0.0333	0.0004
30	0.0222	0.0002

1.3.4. Rozwiązanie MES dla zagadnienia 1D - aproksymacja kubiczna z hierarchicznymi funkcjami kształtu



Równanie dla ES ($x = x^e + a^e$)

$$\int_0^{l^e} w^e [u^{e''} - (x^e + a^e)] dx^e = 0$$

$$\int_0^{l^e} w^e u^{e''} dx^e - \int_0^{l^e} w^e (x^e + a^e) dx^e = 0$$

$$-\int_0^{l^e} w^{e'} u^{e'} dx^e + (w^e u^{e'}) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} w^e (x^e + a^e) dx^e = 0$$

Aproksymacja

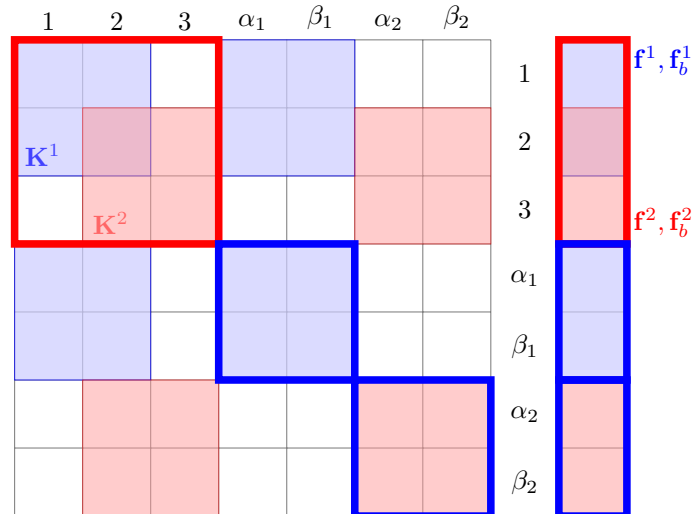
$$u^e = \mathbf{N}^e \{d_i^e \ d_j^e \ \alpha^e \ \beta^e\}, \quad w^e = \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} \quad \mathbf{N}^e = \left[1 - \frac{x^e}{l^e} \quad \frac{x^e}{l^e} \quad x^e(x^e - l^e) \quad x^e(x^e - l^e)(2x^e - l^e) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{l^e} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} \mathbf{d}^e dx^e + \left(\mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} \mathbf{c}^{eT} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e = 0 \\
& -\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} dx^e \mathbf{d}^e + \left(\mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e} - \int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e = 0 \\
& \underbrace{\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{e'T} \mathbf{N}^{e'} dx^e}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{d}^e = \underbrace{\left(\mathbf{N}^{eT} u^{e'} \right) \Big|_0^{l^e}}_{\mathbf{f}_b^e} - \underbrace{\int_0^{l^e} \mathbf{N}^{eT} (x^e + a^e) dx^e}_{\mathbf{f}^e}
\end{aligned}$$

Macierze i wektory z równania MES – dwa ES $\Rightarrow l^e = 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^e &= \int_0^{l^e} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} \\ \frac{1}{l^e} \\ 2x^e - l^e \\ 6x^{e2} - 6l^e x^e + l^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{l^e} & 2x^e - l^e & 6x^{e2} - 6l^e x^e + l^{e2} \end{bmatrix} dx^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_b^e &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} \\ \frac{x^e}{l^e} \\ x^e(x^e - l^e) \\ x^e(x^e - l^e)(2x^e - l^e) \end{bmatrix} u^{e'} \Big|_0^{l^e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^{e'}(l^e) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^{e'}(0^e) = \begin{bmatrix} -u^{e'}(0^e) \\ u^{e'}(l^e) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}^e &= \int_0^{l^e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} \\ \frac{x^e}{l^e} \\ x^e(x^e - l^e) \\ x^e(x^e - l^e)(2x^e - l^e) \end{bmatrix} (x^e + a^e) dx^e = \frac{l^e}{60} \begin{bmatrix} 10l^e + 30a^e \\ 20l^e + 30a^e \\ -5l^{e3} - 10l^{e2}a^e \\ -l^{e4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{f}^1 \stackrel{a^1=0}{=} \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^2 \stackrel{a^2=1}{=} \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ -15 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix}
\end{aligned}$$

Agregacja



Globalne równanie MES

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u^{11}(0^1) = -u'(0) \\ u^{1'}(l^1) - u^{2'}(0^2) = 0 \\ u^{2'}(l^2) = u'(2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \\ 50 \\ -5 \\ -1 \\ -15 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K} \qquad \mathbf{d} \qquad \mathbf{f}_b \qquad \mathbf{f} \\
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ u'(2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \\ 50 \\ -5 \\ -1 \\ -15 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ u'(2) \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{3}\alpha_1 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5}\beta_1 = \frac{1}{60} \\ \frac{1}{3}\alpha_2 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5}\beta_2 = \frac{1}{60} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Rozwiązanie: $d_1 = -\frac{4}{3}$, $d_2 = -\frac{2}{3}$, $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\beta_1 = \frac{1}{12}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$, $\beta_2 = \frac{1}{12}$, $u'(2) = 2.5$ Funkcja $u(x)$ dla dwóch ES zapisana w układzie lokalnym

$$u(x^{(1)}) = -\frac{4}{3}(1 - x^{(1)}) - \frac{2}{3}x^{(1)} + \frac{1}{4}x^{(1)}(x^{(1)} - 1) + \frac{1}{12}x^{(1)}(x^{(1)} - 1)(2x^{(1)} - 1)$$

$$u(x^{(2)}) = -\frac{2}{3}(1 - x^{(2)}) + 1x^{(2)} + \frac{3}{4}x^{(2)}(x^{(2)} - 1) + \frac{1}{12}x^{(2)}(x^{(2)} - 1)(2x^{(2)} - 1)$$

Funkcja $u(x)$ dla dwóch ES zapisana po transformacji do układu globalnego ($x^e = x - a^e$)

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3} & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$u_{por} = u_{dok} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$$

Estymator błędu (Obliczenia względem globalnego układu współrzędnych)

Element 1

$$e^1 = \left| \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \right| = 0$$

Element 2

$$e^2 = \left| \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \right| = 0$$

Wskaźnik (indykator błędu) dla dwóch ES

$$L(e, e) = \int_{l^e} \left(\frac{de^e}{dx^e} \right)^2 dx^e$$
$$\eta = 0$$