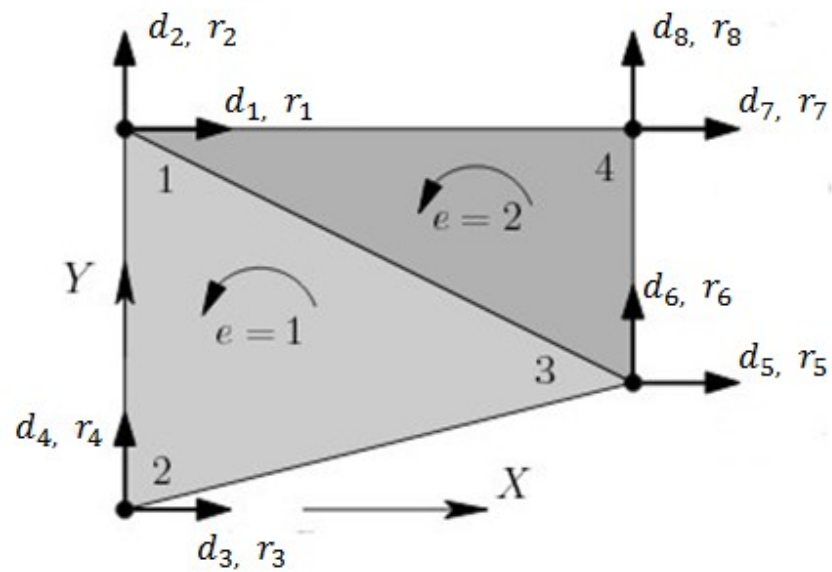
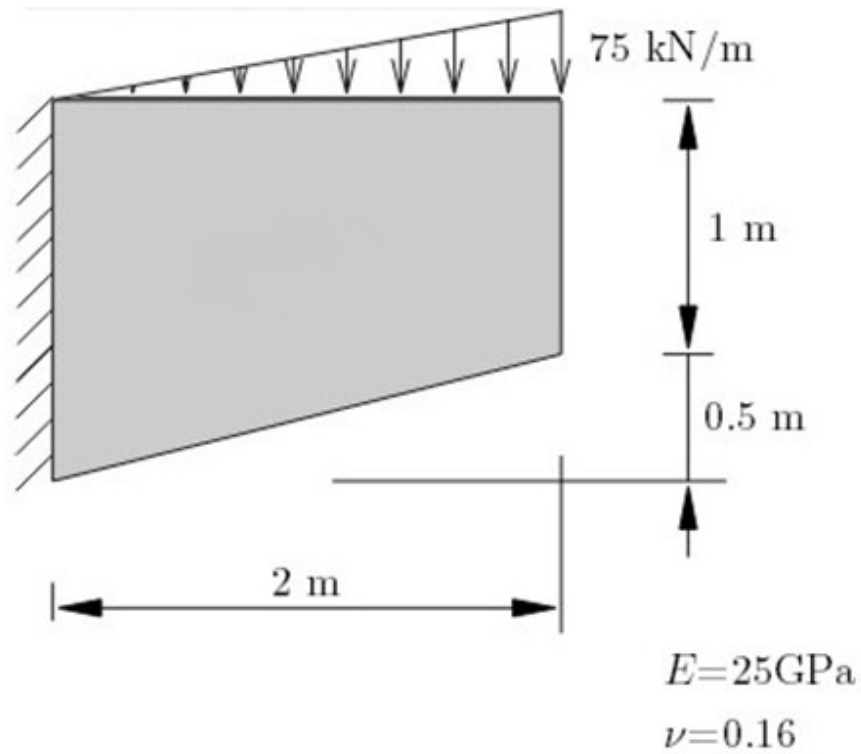




ORIGIN := 1

$$E := 25 \cdot 10^6$$

$$v := 0.16$$

Wzór na obliczenie pola elementów

$$wsp := \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$top := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F(e) := \begin{bmatrix} wsp_{top_{e,1},1} & wsp_{top_{e,1},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,2},1} & wsp_{top_{e,2},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,3},1} & wsp_{top_{e,3},2} & 1 \end{bmatrix} \quad A(e) := \frac{1}{2} \cdot |F(e)|$$

Obliczenie modułu sprężystości

$$D := \frac{E}{(1+v) \cdot (1-2 \cdot v)} \cdot \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot v}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2.6623 \cdot 10^7 & 5.071 \cdot 10^6 & 0 \\ 5.071 \cdot 10^6 & 2.6623 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0776 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie funkcji kształtu

$$\alpha(e, i) := \left(F(e)^{-1} \right)^{(i)} \quad N(e, i, x, y) := \alpha(e, i)_1 \cdot x + \alpha(e, i)_2 \cdot y + \alpha(e, i)_3 \quad e - \text{nr elementu}, i - \text{nr funkcji kształtu}$$

Element 1

$$N(1, 1, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} 0.666667 \cdot y - 0.166667 \cdot x$$

$$N(1, 2, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} -0.666667 \cdot y + (1.0 - 0.333333 \cdot x)$$

$$N(1, 3, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} 0.5 \cdot x$$

Element 2

$$N(2, 1, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} -0.5 \cdot x + 1.0$$

$$N(2, 2, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} -1.0 \cdot y + 1.5$$

$$N(2, 3, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} y + (0.5 \cdot x - 1.5)$$

Macierz funkcji kształtu

$$mN(e, x, y) := \begin{bmatrix} N(e, 1, x, y) & 0 & N(e, 2, x, y) & 0 & N(e, 3, x, y) & 0 \\ 0 & N(e, 1, x, y) & 0 & N(e, 2, x, y) & 0 & N(e, 3, x, y) \end{bmatrix}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

$$mB(e, x, y) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}N(e, 1, x, y) & 0 & \frac{d}{dx}N(e, 2, x, y) & 0 & \frac{d}{dx}N(e, 3, x, y) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy}N(e, 1, x, y) & 0 & \frac{d}{dy}N(e, 2, x, y) & 0 & \frac{d}{dy}N(e, 3, x, y) \\ \frac{d}{dy}N(e, 1, x, y) & \frac{d}{dx}N(e, 1, x, y) & \frac{d}{dy}N(e, 2, x, y) & \frac{d}{dx}N(e, 2, x, y) & \frac{d}{dy}N(e, 3, x, y) & \frac{d}{dx}N(e, 3, x, y) \end{bmatrix}$$

$$mB(1, 0, 0) \xrightarrow{float, 6} \begin{bmatrix} -0.166667 & 0.0 & -0.333333 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.666667 & 0.0 & -0.666667 & 0.0 & 0.0 \\ 0.666667 & -0.166667 & -0.666667 & -0.333333 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A(1) = 1.5$$

$$mB(2, 0, 0) \xrightarrow{float, 6} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & -(0.41359 \cdot 10^{-24}) & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -0.5 & -1.0 & -(0.41359 \cdot 10^{-24}) & 1.0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A(2) = 1$$

Elementowe macierze sztywności

$$Ke(e) := mB(e, 0, 0)^T \cdot D \cdot mB(e, 0, 0) \cdot A(e)$$

$$Ke(1) = \begin{bmatrix} 8.2932 \cdot 10^6 & -2.6411 \cdot 10^6 & -4.9653 \cdot 10^6 & -2.7468 \cdot 10^6 & -3.3278 \cdot 10^6 & 5.3879 \cdot 10^6 \\ -2.6411 \cdot 10^6 & 1.8197 \cdot 10^7 & 1.0565 \cdot 10^5 & -1.685 \cdot 10^7 & 2.5355 \cdot 10^6 & -1.347 \cdot 10^6 \\ -4.9653 \cdot 10^6 & 1.0565 \cdot 10^5 & 1.1621 \cdot 10^7 & 5.2823 \cdot 10^6 & -6.6557 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 \\ -2.7468 \cdot 10^6 & -1.685 \cdot 10^7 & 5.2823 \cdot 10^6 & 1.9544 \cdot 10^7 & -2.5355 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 \\ -3.3278 \cdot 10^6 & 2.5355 \cdot 10^6 & -6.6557 \cdot 10^6 & -2.5355 \cdot 10^6 & 9.9835 \cdot 10^6 & 0 \\ 5.3879 \cdot 10^6 & -1.347 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 & 0 & 4.0409 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$Ke(2) = \begin{bmatrix} 6.6557 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 2.5355 \cdot 10^6 & -6.6557 \cdot 10^6 & -2.5355 \cdot 10^6 \\ 0 & 2.694 \cdot 10^6 & 5.3879 \cdot 10^6 & 0 & -5.3879 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 \\ 0 & 5.3879 \cdot 10^6 & 1.0776 \cdot 10^7 & 0 & -1.0776 \cdot 10^7 & -5.3879 \cdot 10^6 \\ 2.5355 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 2.6623 \cdot 10^7 & -2.5355 \cdot 10^6 & -2.6623 \cdot 10^7 \\ -6.6557 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 & -1.0776 \cdot 10^7 & -2.5355 \cdot 10^6 & 1.7432 \cdot 10^7 & 7.9234 \cdot 10^6 \\ -2.5355 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 & -2.6623 \cdot 10^7 & 7.9234 \cdot 10^6 & 2.9317 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Macierze Boole'a

$$Bo(e) := \begin{array}{l} B_{6,8} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..2 \\ \quad \begin{array}{l} B_{i, 2 \cdot (top_{e,1} - 1) + i} \leftarrow 1 \\ B_{i+2, 2 \cdot (top_{e,2} - 1) + i} \leftarrow 1 \\ B_{i+4, 2 \cdot (top_{e,3} - 1) + i} \leftarrow 1 \end{array} \\ \text{return } B \end{array}$$

$$Bo(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bo(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := Bo(1)^T \cdot Ke(1) \cdot Bo(1) + Bo(2)^T \cdot Ke(2) \cdot Bo(2)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.4949 \cdot 10^7 & -2.6411 \cdot 10^6 & -4.9653 \cdot 10^6 & -2.7468 \cdot 10^6 & -3.3278 \cdot 10^6 & 7.9234 \cdot 10^6 & -6.6557 \cdot 10^6 & -2.5355 \cdot 10^6 \\ -2.6411 \cdot 10^6 & 2.0891 \cdot 10^7 & 1.0565 \cdot 10^5 & -1.685 \cdot 10^7 & 7.9234 \cdot 10^6 & -1.347 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 \\ -4.9653 \cdot 10^6 & 1.0565 \cdot 10^5 & 1.1621 \cdot 10^7 & 5.2823 \cdot 10^6 & -6.6557 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ -2.7468 \cdot 10^6 & -1.685 \cdot 10^7 & 5.2823 \cdot 10^6 & 1.9544 \cdot 10^7 & -2.5355 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ -3.3278 \cdot 10^6 & 7.9234 \cdot 10^6 & -6.6557 \cdot 10^6 & -2.5355 \cdot 10^6 & 2.0759 \cdot 10^7 & 0 & -1.0776 \cdot 10^7 & -5.3879 \cdot 10^6 \\ 7.9234 \cdot 10^6 & -1.347 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 & 0 & 3.0664 \cdot 10^7 & -2.5355 \cdot 10^6 & -2.6623 \cdot 10^7 \\ -6.6557 \cdot 10^6 & -5.3879 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -1.0776 \cdot 10^7 & -2.5355 \cdot 10^6 & 1.7432 \cdot 10^7 & 7.9234 \cdot 10^6 \\ -2.5355 \cdot 10^6 & -2.694 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -5.3879 \cdot 10^6 & -2.6623 \cdot 10^7 & 7.9234 \cdot 10^6 & 2.9317 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Wektor prawej strony - równoważniki obciążenia

Funkcja obciążenia

$$f(p1x, p2x, p1y, p2y, l, s) := \begin{bmatrix} p1x \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right) + p2x \cdot \frac{s}{l} \\ p1y \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right) + p2y \cdot \frac{s}{l} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}(s) := f(0, 0, 0, -75, 2, s)$$

$$F(s) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(75 \cdot s)}{2} \end{bmatrix}$$

Różnoważniki obciążenia dla elementu 2. - obciążenie wzdłuż osi x=s i dla y=1.5

$$Zt2(s) := mN(2, s, 1.5)^T \cdot F(s)$$

$$i := 1 \dots 6$$

$$z2_i := \int_0^2 Zt2(s)_i ds$$

$$z2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

$$p := Bo(2)^T \cdot z2$$

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe - zablokowane
nr stopni swobody

$$war := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$\bar{i} := 1 \dots 4$$

$$I := \text{identity}(8)$$

$$Id_{8,8} := 0$$

$$\bar{Id}_{war_i, war_i} := 1$$

$$Ip := I - Id$$

$$KK := Ip \cdot K \cdot Ip + Id$$

$$pp := Ip \cdot p$$

Rozwiązanie układu równań

$$d := KK^{-1} \cdot pp$$

$$r := K \cdot d - p$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.585 \cdot 10^{-6} \\ -1.0415 \cdot 10^{-5} \\ 3.0919 \cdot 10^{-6} \\ -1.2291 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} -66.6667 \\ 42.9225 \\ 66.6667 \\ 32.0775 \\ 1.4211 \cdot 10^{-14} \\ 5.6843 \cdot 10^{-14} \\ -1.4211 \cdot 10^{-14} \\ -4.9738 \cdot 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Powrót do elementów

$$de(e) := Bo(e) \cdot d$$

$$\varepsilon(e) := mB(e, 0, 0) \cdot de(e)$$

$$\sigma(e) := D \cdot \varepsilon(e)$$

$$\sigma_z(e) := v \cdot (\sigma(e)_1 + \sigma(e)_2)$$

Element 1

$$de(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.585 \cdot 10^{-6} \\ -1.0415 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(1) = \begin{bmatrix} -7.925 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ -5.2077 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(1) = \begin{bmatrix} -21.0985 \\ -4.0188 \\ -56.1174 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z(1) = -4.0188$$

Element 2

$$de(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.585 \cdot 10^{-6} \\ -1.0415 \cdot 10^{-5} \\ 3.0919 \cdot 10^{-6} \\ -1.2291 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(2) = \begin{bmatrix} 1.546 \cdot 10^{-6} \\ -1.8754 \cdot 10^{-6} \\ -1.4685 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(2) = \begin{bmatrix} 31.6478 \\ -42.0881 \\ -15.8239 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z(2) = -1.6704$$

Wartości przemieszczeń w środku ES

$$Xs(e, j) := \frac{\sum_{i=1}^3 wsp_{top_{e,i}, j}}{3}$$

$$Xs(1, 1) = 0.6667$$

$$Xs(2, 1) = 1.3333$$

$$Xs(1, 2) = 0.6667$$

$$Xs(2, 2) = 1.1667$$

$$u(e) := mN(e, Xs(e, 1), Xs(e, 2)) \cdot de(e)$$

$$u(1) = \begin{bmatrix} -5.2833 \cdot 10^{-7} \\ -3.4718 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$u(2) = \begin{bmatrix} 5.0231 \cdot 10^{-7} \\ -7.5687 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$