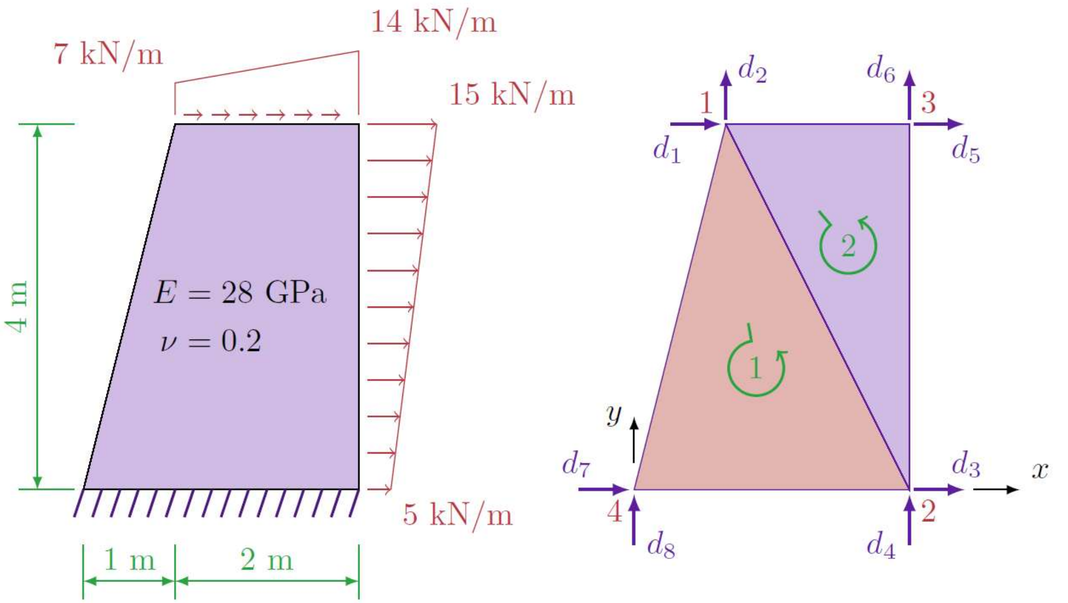

Stałe materiałowe: $E := 28 \cdot 10^{6}$ $\quad v := 0,2$

współrzędne węzłów

$$wsp := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

macierz topologii

$$top := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F(el) := \begin{bmatrix} wsp_{top_{el,1},1} & wsp_{top_{el,1},2} & 1 \\ wsp_{top_{el,2},1} & wsp_{top_{el,2},2} & 1 \\ wsp_{top_{el,3},1} & wsp_{top_{el,3},2} & 1 \end{bmatrix}$$

pole elementów skończonych

$$A(el) := \frac{1}{2} \cdot \left| F(el) \right|$$

macierz związków konstytutywnych

$$D := \frac{E}{(1+v) \cdot (1 - 2 \cdot v)} \cdot \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot v}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3,1111 \cdot 10^{7} & 7,7778 \cdot 10^{6} & 0 \\ 7,7778 \cdot 10^{6} & 3,1111 \cdot 10^{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1,1667 \cdot 10^{7} \end{bmatrix}$$

współczynniki funkcji kształtów

$$\alpha(el;i):=\mathrm{col}\left(\left(F(el)\right)^{-1};i\right)$$

$$N(el;i;x;y):=\alpha(el;i)_1\cdot x+\alpha(el;i)_2\cdot y+\alpha(el;i)_3$$

Funkcje kształtu

Element 1

$$N(1;1;x;y)=\frac{y}{4} \qquad N(1;2;x;y)=\frac{-y+2\cdot(3-x)}{6} \qquad N(1;3;x;y)=\frac{-y+4\cdot x}{12}$$

Element 2

$$N(2;1;x;y)=\frac{3-x}{2} \qquad N(2;2;x;y)=\frac{4-y}{4} \qquad N(2;3;x;y)=\frac{y+2\cdot x-6}{4}$$

macierz funkcji kształtów

$$mN(el;x;y):=\begin{bmatrix} N(el;1;x;y) & 0 & N(el;2;x;y) & 0 & N(el;3;x;y) & 0 \\ 0 & N(el;1;x;y) & 0 & N(el;2;x;y) & 0 & N(el;3;x;y) \end{bmatrix}$$

macierz pochodnych funkcji kształtów

$$mB(el):=\begin{bmatrix} \alpha(el;1)_1 & 0 & \alpha(el;2)_1 & 0 & \alpha(el;3)_1 & 0 \\ 0 & \alpha(el;1)_2 & 0 & \alpha(el;2)_2 & 0 & \alpha(el;3)_2 \\ \alpha(el;1)_2 & \alpha(el;1)_1 & \alpha(el;2)_2 & \alpha(el;2)_1 & \alpha(el;3)_2 & \alpha(el;3)_1 \end{bmatrix}$$

$$A(1)=6 \qquad A(2)=4$$

$$mB(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}3333 & 0 & 0{,}3333 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & -0{,}1667 & 0 & -0{,}0833 \\ 0{,}25 & 0 & -0{,}1667 & -0{,}3333 & -0{,}0833 & 0{,}3333 \end{bmatrix} \qquad mB(2)=\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

elementowe macierze sztywności

$$Ke(el) := mB(el)^{T} \cdot D \cdot mB(el) \cdot A(el)$$

$$Ke(1) = \begin{bmatrix} 4{,}375 \cdot 10^{6} & 0 & -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -1{,}4583 \cdot 10^{6} & 5{,}8333 \cdot 10^{6} \\ 0 & 1{,}1667 \cdot 10^{7} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} & 3{,}8889 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} \\ -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & 2{,}2685 \cdot 10^{7} & 6{,}4815 \cdot 10^{6} & -1{,}9769 \cdot 10^{7} & -2{,}5926 \cdot 10^{6} \\ -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} & 6{,}4815 \cdot 10^{6} & 1{,}2963 \cdot 10^{7} & -6{,}4815 \cdot 10^{5} & -5{,}1852 \cdot 10^{6} \\ -1{,}4583 \cdot 10^{6} & 3{,}8889 \cdot 10^{6} & -1{,}9769 \cdot 10^{7} & -6{,}4815 \cdot 10^{5} & 2{,}1227 \cdot 10^{7} & -3{,}2407 \cdot 10^{6} \\ 5{,}8333 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -2{,}5926 \cdot 10^{6} & -5{,}1852 \cdot 10^{6} & -3{,}2407 \cdot 10^{6} & 9{,}0741 \cdot 10^{6} \end{bmatrix}$$

$$Ke(2) = \begin{bmatrix} 3{,}1111 \cdot 10^{7} & 0 & 0 & 3{,}8889 \cdot 10^{6} & -3{,}1111 \cdot 10^{7} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} \\ 0 & 1{,}1667 \cdot 10^{7} & 5{,}8333 \cdot 10^{6} & 0 & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -1{,}1667 \cdot 10^{7} \\ 0 & 5{,}8333 \cdot 10^{6} & 2{,}9167 \cdot 10^{6} & 0 & -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} \\ 3{,}8889 \cdot 10^{6} & 0 & 0 & 7{,}7778 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} \\ -3{,}1111 \cdot 10^{7} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & 3{,}4028 \cdot 10^{7} & 9{,}7222 \cdot 10^{6} \\ -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -1{,}1667 \cdot 10^{7} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} & 9{,}7222 \cdot 10^{6} & 1{,}9444 \cdot 10^{7} \end{bmatrix}$$

macierze Boole'a

```
Bo(el) := | B[6 8] := 0
          | for i ∈ [1..2]
          |   | B[i  2·(top[el 1] − 1) + i] := 1
          |   | B[i+2  2·(top[el 2] − 1) + i] := 1
          |   | B[i+4  2·(top[el 3] − 1) + i] := 1
          | B
```

$$Bo(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Bo(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agregacja

$$K := Bo(1)^{T} \cdot Ke(1) \cdot Bo(1) + Bo(2)^{T} \cdot Ke(2) \cdot Bo(2)$$

Globalna macierz sztywności

$$K = \begin{bmatrix} 3{,}5486 \cdot 10^{7} & 0 & -1{,}4583 \cdot 10^{6} & 9{,}7222 \cdot 10^{6} & -3{,}1111 \cdot 10^{7} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} \\ 0 & 2{,}3333 \cdot 10^{7} & 9{,}7222 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -1{,}1667 \cdot 10^{7} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} \\ -1{,}4583 \cdot 10^{6} & 9{,}7222 \cdot 10^{6} & 2{,}4144 \cdot 10^{7} & -3{,}2407 \cdot 10^{6} & -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -1{,}9769 \cdot 10^{7} & -6{,}4815 \cdot 10^{5} \\ 9{,}7222 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -3{,}2407 \cdot 10^{6} & 1{,}6852 \cdot 10^{7} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} & -2{,}5926 \cdot 10^{6} & -5{,}1852 \cdot 10^{6} \\ -3{,}1111 \cdot 10^{7} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & 3{,}4028 \cdot 10^{7} & 9{,}7222 \cdot 10^{6} & 0 & 0 \\ -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -1{,}1667 \cdot 10^{7} & -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} & 9{,}7222 \cdot 10^{6} & 1{,}9444 \cdot 10^{7} & 0 & 0 \\ -2{,}9167 \cdot 10^{6} & -3{,}8889 \cdot 10^{6} & -1{,}9769 \cdot 10^{7} & -2{,}5926 \cdot 10^{6} & 0 & 0 & 2{,}2685 \cdot 10^{7} & 6{,}4815 \cdot 10^{6} \\ -5{,}8333 \cdot 10^{6} & -7{,}7778 \cdot 10^{6} & -6{,}4815 \cdot 10^{5} & -5{,}1852 \cdot 10^{6} & 0 & 0 & 6{,}4815 \cdot 10^{6} & 1{,}2963 \cdot 10^{7} \end{bmatrix}$$

funkcja obciążenia

$$f\left(p1_{x}; p2_{x}; p1_{y}; p2_{y}; L; s\right) := \begin{bmatrix} p1_{x} \cdot \left(1 - \frac{s}{L}\right) + p2_{x} \cdot \frac{s}{L} \\ p1_{y} \cdot \left(1 - \frac{s}{L}\right) + p2_{y} \cdot \frac{s}{L} \end{bmatrix}$$

obciążenie

$$Fg(s) := f(7; 14; 0; 0; 2; s-1) \qquad Fg(s) = \begin{bmatrix} \frac{7 \cdot (3 - s + 2 \cdot (-1 + s))}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Zt2g(s) := mN(2; s; 4)^{T} \cdot Fg(s)$$

$$Fp(s) := f(5; 15; 0; 0; 4; s) \qquad Fp(s) = \begin{bmatrix} \frac{5 \cdot (4 - s + 3 \cdot s)}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Zt2p(s) := mN(2; 3; s)^{T} \cdot Fp(s)$$

równoważnik obciążenia

$i := [1..6]$

$$z2_i := \int_1^3 Zt2g(s)_i \, ds + \int_0^4 Zt2p(s)_i \, ds$$

$$z2 = \begin{bmatrix} 9,3333 \\ 0 \\ 16,6667 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix}$$

globalny wektor sił zastępczych

$$p := Bo(2)^T \cdot z2$$

$$p = \begin{bmatrix} 9,3333 \\ 0 \\ 16,6667 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

warunki brzegowe

$$war := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

uwzględnienie warunków brzegowych

$I := \text{identity}(8)$ $\quad Id_{8\,8} := 0$ $\quad$ for $i \in [1..4]$ $\; Id_{war_i\, war_i} := 1$ $\quad Ip := I - Id$ $\quad KK := Ip \cdot K \cdot Ip + Id$ $\quad pp := Ip \cdot p$

rozwiązanie układu równań MES

$d := KK^{-1} \cdot pp$ $\quad r := K \cdot d - p$

$$d = \begin{bmatrix} 8,512 \cdot 10^{-6} \\ 1,216 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 9,712 \cdot 10^{-6} \\ -2,424 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 2,3636 \cdot 10^{-12} \\ 3,2343 \cdot 10^{-13} \\ -31,4444 \\ 59,1111 \\ -8,5672 \cdot 10^{-13} \\ 0 \\ -29,5556 \\ -59,1111 \end{bmatrix}$$

Powrót do elementów

odkształcenia

$d1 := Bo(1) \cdot d$

$\varepsilon_1 := mB(1) \cdot d1$

$d2 := Bo(2) \cdot d$

$\varepsilon_2 := mB(2) \cdot d2$

przemieszczenie węzłów w elemenencie

$$d1 = \begin{bmatrix} 8,512 \cdot 10^{-6} \\ 1,216 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,04 \cdot 10^{-7} \\ 2,128 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$d2 = \begin{bmatrix} 8,512 \cdot 10^{-6} \\ 1,216 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 9,712 \cdot 10^{-6} \\ -2,424 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 6 \cdot 10^{-7} \\ -6,06 \cdot 10^{-7} \\ 6,08 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

naprężenia

$\sigma_1 := D \cdot \varepsilon_1$

$\sigma_2 := D \cdot \varepsilon_2$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,3644 \\ 9,4578 \\ 24,8267 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 13,9533 \\ -14,1867 \\ 7,0933 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{1z} := v \cdot \left({\sigma_1}_1 + {\sigma_1}_2 \right)$

$\sigma_{1z} = 2,3644$

$\sigma_{2z} := v \cdot \left({\sigma_2}_1 + {\sigma_2}_2 \right)$

$\sigma_{2z} = -0,0467$

Wartości przemieszczeń w środku ES

$$X_s(el; j) := \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{3} {wsp_{top}}_{{el}\, k}{}^{j}}{3}$$

Element 1

$X_s(1; 1) = 1,3333$

$X_s(1; 2) = 1,3333$

Element 2

$X_s(2; 1) = 2,3333$

$X_s(2; 2) = 2,6667$

$u1 := mN\left(1; X_s(1; 1); X_s(1; 2)\right) \cdot d1$

$$u1 = \begin{bmatrix} 2,8373 \cdot 10^{-6} \\ 4,0533 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$u2 := mN\left(2; X_s(2; 1); X_s(2; 2)\right) \cdot d2$

$$u2 = \begin{bmatrix} 6,0747 \cdot 10^{-6} \\ -4,0267 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$