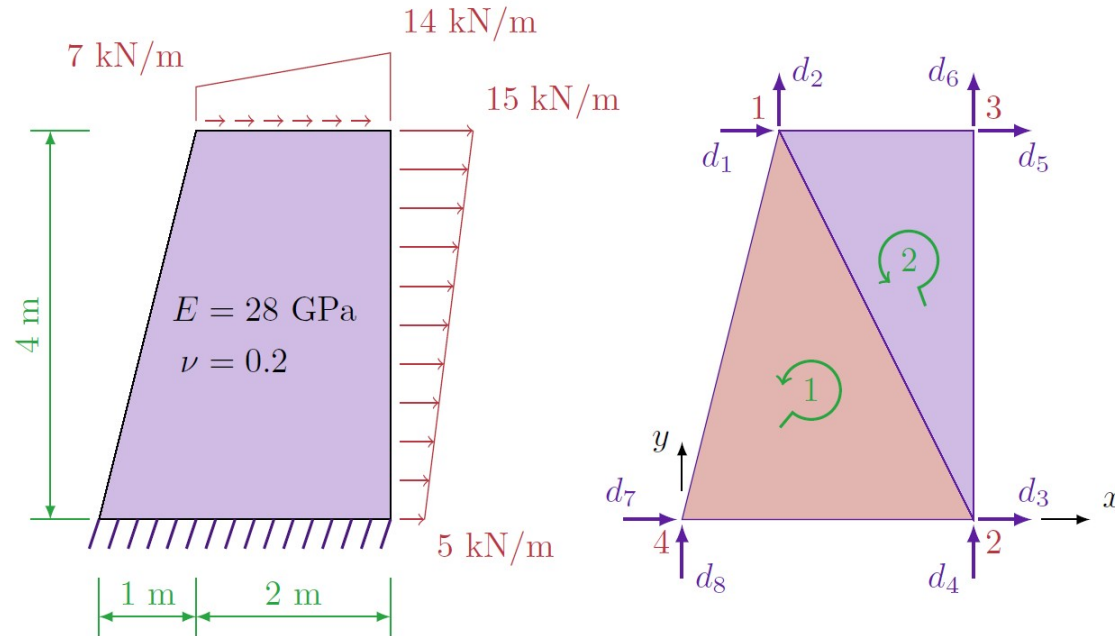




ORIGIN := 1

$$E := 28 \cdot 10^6$$

$$\nu := 0.2$$

Wzór na obliczenie pola elementów

$$wsp := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$top := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(e) := \begin{bmatrix} wsp_{top_{e,1},1} & wsp_{top_{e,1},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,2},1} & wsp_{top_{e,2},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,3},1} & wsp_{top_{e,3},2} & 1 \end{bmatrix} \quad A(e) := \frac{1}{2} \cdot |F(e)|$$

Obliczenie modułu sprężystości

$$D := \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3.1111 \cdot 10^7 & 7.7778 \cdot 10^6 & 0 \\ 7.7778 \cdot 10^6 & 3.1111 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1667 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie funkcji kształtu

$$\alpha(e, i) := \left(F(e)^{-1}\right)^{(i)} \quad N(e, i, x, y) := \alpha(e, i)_1 \cdot x + \alpha(e, i)_2 \cdot y + \alpha(e, i)_3 \quad e - \text{nr elementu}, i - \text{nr funkcji kształtu}$$

Element 1

$$N(1, 1, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} -1.0 \cdot 0.166667 \cdot y + (1.0 - 1.0 \cdot 0.333333 \cdot x)$$

$$N(1, 2, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} -1.0 \cdot 0.0833333 \cdot y + 0.333333 \cdot x$$

$$N(1, 3, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} 0.25 \cdot y$$

Element 2

$$N(2, 1, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} -1.0 \cdot 0.25 \cdot y + 1.0$$

$$N(2, 2, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} 0.25 \cdot y + (0.5 \cdot x - 1.5)$$

$$N(2, 3, x, y) \xrightarrow{\text{float}, 6} -1.0 \cdot 0.5 \cdot x + 1.5$$

Macierz funkcji kształtu

$$mN(e, x, y) := \begin{bmatrix} N(e, 1, x, y) & 0 & N(e, 2, x, y) & 0 & N(e, 3, x, y) & 0 \\ 0 & N(e, 1, x, y) & 0 & N(e, 2, x, y) & 0 & N(e, 3, x, y) \end{bmatrix}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

$$mB(e, x, y) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} N(e, 1, x, y) & 0 & \frac{d}{dx} N(e, 2, x, y) & 0 & \frac{d}{dx} N(e, 3, x, y) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} N(e, 1, x, y) & 0 & \frac{d}{dy} N(e, 2, x, y) & 0 & \frac{d}{dy} N(e, 3, x, y) \\ \frac{d}{dy} N(e, 1, x, y) & \frac{d}{dx} N(e, 1, x, y) & \frac{d}{dy} N(e, 2, x, y) & \frac{d}{dx} N(e, 2, x, y) & \frac{d}{dy} N(e, 3, x, y) & \frac{d}{dx} N(e, 3, x, y) \end{bmatrix}$$

$$mB(1, 0, 0) \xrightarrow{\text{float}, 6} \begin{bmatrix} -0.333333 & 0.0 & 0.333333 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.166667 & 0.0 & -0.0833333 & 0.0 & 0.25 \\ -0.166667 & -0.333333 & -0.0833333 & 0.333333 & 0.25 & 0.0 \end{bmatrix} \quad A(1) = 6$$

$$mB(2, 0, 0) \xrightarrow{\text{float}, 6} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & -0.5 & 0.0 \\ 0.0 & -0.25 & 0.0 & 0.25 & 0.0 & 0.0 \\ -0.25 & 0.0 & 0.25 & 0.5 & 0.0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad A(2) = 4$$

Elementowe macierze sztywności

$$Ke(e) := mB(e, 0, 0)^T \cdot D \cdot mB(e, 0, 0) \cdot A(e)$$

$$Ke(1) = \begin{bmatrix} 2.2685 \cdot 10^7 & 6.4815 \cdot 10^6 & -1.9769 \cdot 10^7 & -2.5926 \cdot 10^6 & -2.9167 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 \\ 6.4815 \cdot 10^6 & 1.2963 \cdot 10^7 & -6.4815 \cdot 10^5 & -5.1852 \cdot 10^6 & -5.8333 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 \\ -1.9769 \cdot 10^7 & -6.4815 \cdot 10^5 & 2.1227 \cdot 10^7 & -3.2407 \cdot 10^6 & -1.4583 \cdot 10^6 & 3.8889 \cdot 10^6 \\ -2.5926 \cdot 10^6 & -5.1852 \cdot 10^6 & -3.2407 \cdot 10^6 & 9.0741 \cdot 10^6 & 5.8333 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 \\ -2.9167 \cdot 10^6 & -5.8333 \cdot 10^6 & -1.4583 \cdot 10^6 & 5.8333 \cdot 10^6 & 4.375 \cdot 10^6 & 0 \\ -3.8889 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 & 3.8889 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 & 0 & 1.1667 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$Ke(2) = \begin{bmatrix} 2.9167 \cdot 10^6 & 0 & -2.9167 \cdot 10^6 & -5.8333 \cdot 10^6 & 0 & 5.8333 \cdot 10^6 \\ 0 & 7.7778 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 & 3.8889 \cdot 10^6 & 0 \\ -2.9167 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 & 3.4028 \cdot 10^7 & 9.7222 \cdot 10^6 & -3.1111 \cdot 10^7 & -5.8333 \cdot 10^6 \\ -5.8333 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 & 9.7222 \cdot 10^6 & 1.9444 \cdot 10^7 & -3.8889 \cdot 10^6 & -1.1667 \cdot 10^7 \\ 0 & 3.8889 \cdot 10^6 & -3.1111 \cdot 10^7 & -3.8889 \cdot 10^6 & 3.1111 \cdot 10^7 & 0 \\ 5.8333 \cdot 10^6 & 0 & -5.8333 \cdot 10^6 & -1.1667 \cdot 10^7 & 0 & 1.1667 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Macierze Boole'a

$$Bo(e) := \begin{array}{|l} B_{6,8} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..2 \\ \quad \begin{array}{|l} B_{i, 2 \cdot (top_{e,1} - 1) + i} \leftarrow 1 \\ B_{i+2, 2 \cdot (top_{e,2} - 1) + i} \leftarrow 1 \\ B_{i+4, 2 \cdot (top_{e,3} - 1) + i} \leftarrow 1 \end{array} \\ \text{return } B \end{array}$$

$$Bo(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bo(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := Bo(1)^T \cdot Ke(1) \cdot Bo(1) + Bo(2)^T \cdot Ke(2) \cdot Bo(2)$$

$$K = \begin{bmatrix} 3.5486 \cdot 10^7 & 0 & -1.4583 \cdot 10^6 & 9.7222 \cdot 10^6 & -3.1111 \cdot 10^7 & -3.8889 \cdot 10^6 & -2.9167 \cdot 10^6 & -5.8333 \cdot 10^6 \\ 0 & 2.3333 \cdot 10^7 & 9.7222 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 & -5.8333 \cdot 10^6 & -1.1667 \cdot 10^7 & -3.8889 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 \\ -1.4583 \cdot 10^6 & 9.7222 \cdot 10^6 & 2.4144 \cdot 10^7 & -3.2407 \cdot 10^6 & -2.9167 \cdot 10^6 & -5.8333 \cdot 10^6 & -1.9769 \cdot 10^7 & -6.4815 \cdot 10^5 \\ 9.7222 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 & -3.2407 \cdot 10^6 & 1.6852 \cdot 10^7 & -3.8889 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 & -2.5926 \cdot 10^6 & -5.1852 \cdot 10^6 \\ -3.1111 \cdot 10^7 & -5.8333 \cdot 10^6 & -2.9167 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 & 3.4028 \cdot 10^7 & 9.7222 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ -3.8889 \cdot 10^6 & -1.1667 \cdot 10^7 & -5.8333 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 & 9.7222 \cdot 10^6 & 1.9444 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ -2.9167 \cdot 10^6 & -3.8889 \cdot 10^6 & -1.9769 \cdot 10^7 & -2.5926 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 2.2685 \cdot 10^7 & 6.4815 \cdot 10^6 \\ -5.8333 \cdot 10^6 & -7.7778 \cdot 10^6 & -6.4815 \cdot 10^5 & -5.1852 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 6.4815 \cdot 10^6 & 1.2963 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Wektor prawej strony - równoważniki obciążenia

Funkcja obciążenia

$$f(p1x, p2x, p1y, p2y, l, s) := \begin{bmatrix} p1x \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right) + p2x \cdot \frac{s}{l} \\ p1y \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right) + p2y \cdot \frac{s}{l} \end{bmatrix}$$

obciążenie definiowane w układzie globalnym

$$\text{Brzeg górny elementu 2} \quad Fg(s) := f(7, 14, 0, 0, 2, s-1) \quad Fg(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{7 \cdot s + 7}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równoważniki obciążenia dla elementu 2. - obciążenie wzdłuż osi x=s i dla y=4

$$Zt2g(s) := mN(2, s, 4)^T \cdot Fg(s)$$

$$\text{Brzeg prawy elementu 2} \quad Fp(s) := f(5, 15, 0, 0, 4, s) \quad Fp(s) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5 \cdot s}{2} + 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równoważniki obciążenia dla elementu 2. - obciążenie wzdłuż osi x=3 i dla y=s

$$Zt2p(s) := mN(2, 3, s)^T \cdot Fp(s)$$

$$i := 1 \dots 6$$

$$z2_i := \int_1^3 Zt2g(s)_i ds + \int_0^4 Zt2p(s)_i ds$$

$$z2 = \begin{bmatrix} 16.6667 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \\ 9.3333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p := Bo(2)^T \cdot z2 \quad p = \begin{bmatrix} 9.3333 \\ 0 \\ 16.6667 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe - zablokowane
nr stopni swobody

$$war := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$i := 1 \dots 4 \quad I := \text{identity}(8) \quad Id_{8,8} := 0 \quad Id_{war_i, war_i} := 1 \quad Ip := I - Id \quad KK := Ip \cdot K \cdot Ip + Id \quad pp := Ip \cdot p$$

Rozwiązanie układu równań

$$d := KK^{-1} \cdot pp$$

$$r := K \cdot d - p$$

$$d = \begin{bmatrix} 8.512 \cdot 10^{-6} \\ 1.216 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 9.712 \cdot 10^{-6} \\ -2.424 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 3.5527 \cdot 10^{-14} \\ 7.1054 \cdot 10^{-15} \\ -31.4444 \\ 59.1111 \\ -3.5527 \cdot 10^{-14} \\ -7.1054 \cdot 10^{-15} \\ -29.5556 \\ -59.1111 \end{bmatrix}$$

Wyniki z Robota

Węzeł/Przypadek		UX (m)	UZ (m)
1/	2	0,0	0,0
2/	2	9,7120e-06	-2,4240e-06
3/	2	8,5120e-06	1,2160e-06
4/	2	0,0	0,0

Węzeł/Przypadek		FX (kN)	FZ (kN)
1/	2	-31,44	59,11
4/	2	-29,56	-59,11

Powrót do elementów

$$de(e) := Bo(e) \cdot d$$

$$\varepsilon(e) := mB(e, 0, 0) \cdot de(e)$$

$$\sigma(e) := D \cdot \varepsilon(e)$$

$$\sigma_z(e) := v \cdot (\sigma(e)_1 + \sigma(e)_2)$$

Element 1

$$de(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.512 \cdot 10^{-6} \\ 1.216 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.04 \cdot 10^{-7} \\ 2.128 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(1) = \begin{bmatrix} 2.3644 \\ 9.4578 \\ 24.8267 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z(1) = 2.3644$$

Element 2

$$de(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.712 \cdot 10^{-6} \\ -2.424 \cdot 10^{-6} \\ 8.512 \cdot 10^{-6} \\ 1.216 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(2) = \begin{bmatrix} 6 \cdot 10^{-7} \\ -6.06 \cdot 10^{-7} \\ 6.08 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(2) = \begin{bmatrix} 13.9533 \\ -14.1867 \\ 7.0933 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z(2) = -0.0467$$

Wartości przemieszczeń w środku ES

Panel/Węzeł/Przypadek			sXX (kPa)	sYY (kPa)	sXY (kPa)	sNorm. (kPa)
1/	1/	2	2,3644	9,4578	24,8267	2,3644
1/	3/	2	2,3644	9,4578	24,8267	2,3644
1/	4/	2	2,3644	9,4578	24,8267	2,3644
2/	1/	2	13,9533	-14,1867	7,0933	-0,0467
2/	2/	2	13,9533	-14,1867	7,0933	-0,0467
2/	3/	2	13,9533	-14,1867	7,0933	-0,0467

$$Xs(e, j) := \frac{\sum_{i=1}^3 wsp_{top_{e,i}, j}}{3}$$

$$Xs(1, 1) = 1.3333$$

$$Xs(2, 1) = 2.3333$$

$$Xs(1, 2) = 1.3333$$

$$Xs(2, 2) = 2.6667$$

$$u(e) := mN(e, Xs(e, 1), Xs(e, 2)) \cdot de(e)$$

$$u(1) = \begin{bmatrix} 2.8373 \cdot 10^{-6} \\ 4.0533 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$u(2) = \begin{bmatrix} 6.0747 \cdot 10^{-6} \\ -4.0267 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$