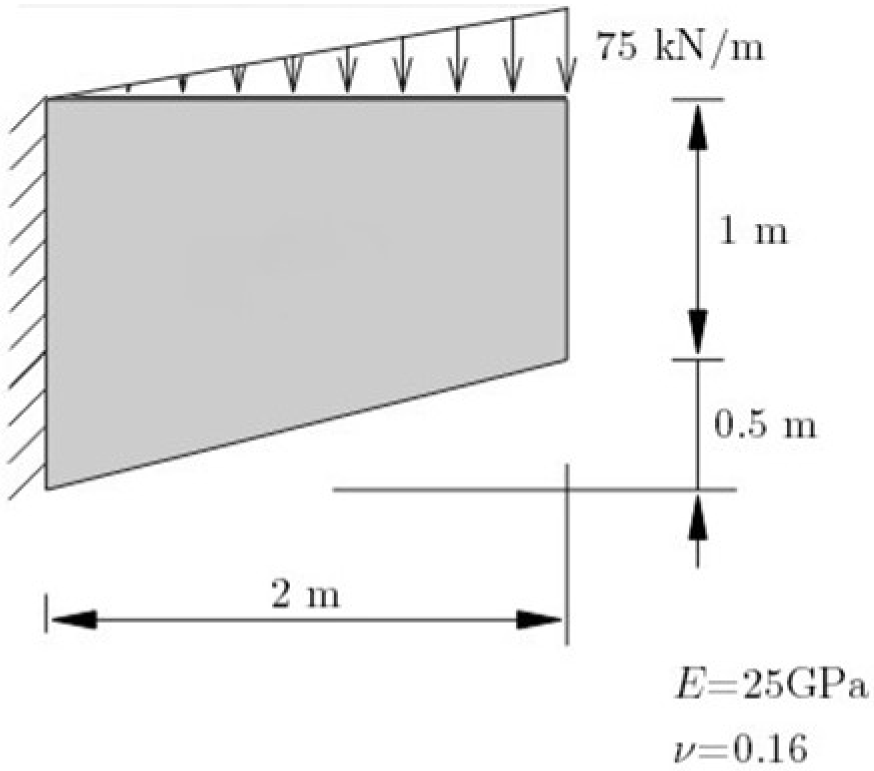

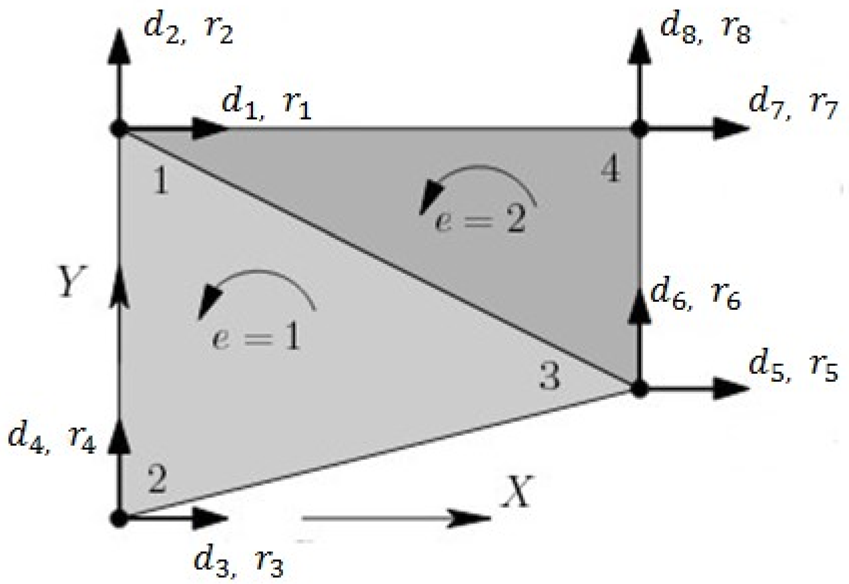

$ORIGIN := 1$

Stałe materiałowe

Wzór na obliczenie pola elementów

$E := 25e6 \qquad v := 0.16$

$$wsp := \begin{pmatrix} 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1.5 \end{pmatrix} \qquad top := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad F(e) := \begin{pmatrix} wsp_{top_{e,1},1} & wsp_{top_{e,1},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,2},1} & wsp_{top_{e,2},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,3},1} & wsp_{top_{e,3},2} & 1 \end{pmatrix} \qquad A(e) := \frac{1}{2}\cdot\left|F(e)\right|$$

Obliczenie modułu sprężystości

$$D := \frac{E}{(1+v)\cdot(1-2\cdot v)}\cdot\begin{pmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\cdot v}{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2.662\times10^{7} & 5.071\times10^{6} & 0 \\ 5.071\times10^{6} & 2.662\times10^{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1.078\times10^{7} \end{pmatrix}$$

Wyznaczenie funkcji kształtu

$$C(e,i) := \left(F(e)^{-1}\right)^{\langle i\rangle} \qquad N(e,i,x,y) := C(e,i)_1 \cdot x + C(e,i)_2 \cdot y + C(e,i)_3$$

e - nr elementu; i - nr funkcji kształtu

Element 1

$$N(1,1,x,y) \rightarrow -0.16666666666666666667 \cdot x + 0.66666666666666666667 \cdot y$$

$$N(1,2,x,y) \rightarrow -0.33333333333333333333 \cdot x + -0.66666666666666666667 \cdot y + 1$$

$$N(1,3,x,y) \rightarrow \frac{x}{2}$$

Element 2

$$N(2,1,x,y) \rightarrow 1 - \frac{x}{2}$$

$$N(2,2,x,y) \rightarrow -1.0 \cdot y + 1.5$$

$$N(2,3,x,y) \rightarrow 0.5 \cdot x + 1.0 \cdot y - 1.5$$

Macierz funkcji kształtu

$$N(e,x,y) := \begin{pmatrix} N(e,1,x,y) & 0 & N(e,2,x,y) & 0 & N(e,3,x,y) & 0 \\ 0 & N(e,1,x,y) & 0 & N(e,2,x,y) & 0 & N(e,3,x,y) \end{pmatrix}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

$$B(e,x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}N(e,1,x,y) & 0 & \frac{d}{dx}N(e,2,x,y) & 0 & \frac{d}{dx}N(e,3,x,y) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy}N(e,1,x,y) & 0 & \frac{d}{dy}N(e,2,x,y) & 0 & \frac{d}{dy}N(e,3,x,y) \\ \frac{d}{dy}N(e,1,x,y) & \frac{d}{dx}N(e,1,x,y) & \frac{d}{dy}N(e,2,x,y) & \frac{d}{dx}N(e,2,x,y) & \frac{d}{dy}N(e,3,x,y) & \frac{d}{dx}N(e,3,x,y) \end{pmatrix}$$

$$A(1) = 1.5 \qquad A(2) = 1$$

$$B(1,0,0) = \begin{pmatrix} -0.167 & 0 & -0.333 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.667 & 0 & -0.667 & 0 & 0 \\ 0.667 & -0.167 & -0.667 & -0.333 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad B(2,0,0) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Macierze sztywności

$$Ke(e) := B(e,0,0)^T \cdot D \cdot B(e,0,0) \cdot A(e)$$

$$Ke(1) = \begin{pmatrix} 8.293\times10^{6} & -2.641\times10^{6} & -4.965\times10^{6} & -2.747\times10^{6} & -3.328\times10^{6} & 5.388\times10^{6} \\ -2.641\times10^{6} & 1.82\times10^{7} & 1.056\times10^{5} & -1.685\times10^{7} & 2.535\times10^{6} & -1.347\times10^{6} \\ -4.965\times10^{6} & 1.056\times10^{5} & 1.162\times10^{7} & 5.282\times10^{6} & -6.656\times10^{6} & -5.388\times10^{6} \\ -2.747\times10^{6} & -1.685\times10^{7} & 5.282\times10^{6} & 1.954\times10^{7} & -2.535\times10^{6} & -2.694\times10^{6} \\ -3.328\times10^{6} & 2.535\times10^{6} & -6.656\times10^{6} & -2.535\times10^{6} & 9.984\times10^{6} & 0 \\ 5.388\times10^{6} & -1.347\times10^{6} & -5.388\times10^{6} & -2.694\times10^{6} & 0 & 4.041\times10^{6} \end{pmatrix}$$

$$Ke(2) = \begin{pmatrix} 6.656\times10^{6} & 0 & 0 & 2.535\times10^{6} & -6.656\times10^{6} & -2.535\times10^{6} \\ 0 & 2.694\times10^{6} & 5.388\times10^{6} & 0 & -5.388\times10^{6} & -2.694\times10^{6} \\ 0 & 5.388\times10^{6} & 1.078\times10^{7} & 0 & -1.078\times10^{7} & -5.388\times10^{6} \\ 2.535\times10^{6} & 0 & 0 & 2.662\times10^{7} & -2.535\times10^{6} & -2.662\times10^{7} \\ -6.656\times10^{6} & -5.388\times10^{6} & -1.078\times10^{7} & -2.535\times10^{6} & 1.743\times10^{7} & 7.923\times10^{6} \\ -2.535\times10^{6} & -2.694\times10^{6} & -5.388\times10^{6} & -2.662\times10^{7} & 7.923\times10^{6} & 2.932\times10^{7} \end{pmatrix}$$

Macierze Boole'a

$$Bo(el) := \left| \begin{array}{l} Bo_{6,8} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} Bo_{i,2\cdot(top_{el,1}-1)+i} \leftarrow 1 \\ Bo_{i+2,2\cdot(top_{el,2}-1)+i} \leftarrow 1 \\ Bo_{i+4,2\cdot(top_{el,3}-1)+i} \leftarrow 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$Bo(1) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \qquad Bo(2) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := Bo(1)^{T}\cdot Ke(1)\cdot Bo(1) + Bo(2)^{T}\cdot Ke(2)\cdot Bo(2)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1.495\times10^{7} & -2.641\times10^{6} & -4.965\times10^{6} & -2.747\times10^{6} & -3.328\times10^{6} & 7.923\times10^{6} & -6.656\times10^{6} & -2.535\times10^{6} \\ -2.641\times10^{6} & 2.089\times10^{7} & 1.056\times10^{5} & -1.685\times10^{7} & 7.923\times10^{6} & -1.347\times10^{6} & -5.388\times10^{6} & -2.694\times10^{6} \\ -4.965\times10^{6} & 1.056\times10^{5} & 1.162\times10^{7} & 5.282\times10^{6} & -6.656\times10^{6} & -5.388\times10^{6} & 0 & 0 \\ -2.747\times10^{6} & -1.685\times10^{7} & 5.282\times10^{6} & 1.954\times10^{7} & -2.535\times10^{6} & -2.694\times10^{6} & 0 & 0 \\ -3.328\times10^{6} & 7.923\times10^{6} & -6.656\times10^{6} & -2.535\times10^{6} & 2.076\times10^{7} & 0 & -1.078\times10^{7} & -5.388\times10^{6} \\ 7.923\times10^{6} & -1.347\times10^{6} & -5.388\times10^{6} & -2.694\times10^{6} & 0 & 3.066\times10^{7} & -2.535\times10^{6} & -2.662\times10^{7} \\ -6.656\times10^{6} & -5.388\times10^{6} & 0 & 0 & -1.078\times10^{7} & -2.535\times10^{6} & 1.743\times10^{7} & 7.923\times10^{6} \\ -2.535\times10^{6} & -2.694\times10^{6} & 0 & 0 & -5.388\times10^{6} & -2.662\times10^{7} & 7.923\times10^{6} & 2.932\times10^{7} \end{pmatrix}$$

Wektor prawej strony - równoważniki obciążenia

funkcja obciążenia

$$f(p1_x, p2_x, p1_y, p2_y, L, s) := \begin{bmatrix} p1_x \cdot \left(1 - \frac{s}{L}\right) + p2_x \cdot \frac{s}{L} \\ p1_y \cdot \left(1 - \frac{s}{L}\right) + p2_y \cdot \frac{s}{L} \end{bmatrix} \qquad F(s) := f(0,0,0,-75,2,s) \qquad F(s) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{75 \cdot s}{2} \end{pmatrix}$$

Zastępnik dla elementu 2 - obciążenie wzdłuż osi x=s i dla y=1.5

$$Zt2(s) := N(2, s, 1.5)^T \cdot F(s)$$

$$i := 1..6$$

$$z2_i := \int_0^2 Zt2(s)_i \, ds \qquad z2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix} \qquad p := Bo(2)^T \cdot z2 \qquad p = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe - zablokowane nr stopni swobody

$$war := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$i := 1..4 \quad I := identity(8) \quad Id_{8,8} := 0 \quad Id_{war_i, war_i} := 1 \quad Ip := I - Id \quad KK := Ip \cdot K \cdot Ip + Id \quad pp := Ip \cdot p$$

Rozwiązanie równania MES

$$d := KK^{-1} \cdot pp$$

$$r := K \cdot d - p$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.585 \times 10^{-6} \\ -1.042 \times 10^{-5} \\ 3.092 \times 10^{-6} \\ -1.229 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} -66.667 \\ 42.923 \\ 66.667 \\ 32.077 \\ 0 \\ 5.684 \times 10^{-14} \\ -1.421 \times 10^{-14} \\ 7.105 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Powrót do elementów

$$d1 := Bo(1) \cdot d \qquad d1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.585 \times 10^{-6} \\ -1.042 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 := B(1,0,0) \cdot d1 \qquad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -7.925 \times 10^{-7} \\ 0 \\ -5.208 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 := D \cdot \varepsilon_1 \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} -21.099 \\ -4.019 \\ -56.117 \end{pmatrix}$$

$$d2 := Bo(2) \cdot d \qquad d2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.585 \times 10^{-6} \\ -1.042 \times 10^{-5} \\ 3.092 \times 10^{-6} \\ -1.229 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2 := B(2,0,0) \cdot d2 \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1.546 \times 10^{-6} \\ -1.875 \times 10^{-6} \\ -1.468 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 := D \cdot \varepsilon_2 \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 31.648 \\ -42.088 \\ -15.824 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{1z} := v \cdot \left(\sigma_{1_1} + \sigma_{1_2}\right) \qquad \sigma_{1z} = -4.019$$

$$\sigma_{2z} := v \cdot \left(\sigma_{2_1} + \sigma_{2_2}\right) \qquad \sigma_{2z} = -1.67$$

Wartość przemieszczeń w środku ES

e - nr elementu
j - nr współrzędnej

$$X_s(e,j) := \frac{\sum_{i=1}^{3} wsp_{top_{e,i},j}}{3}$$

$X_s(1,1) = 0.667$

$X_s(1,2) = 0.667$

$X_s(2,1) = 1.333$

$X_s(2,2) = 1.167$

$u1 := N\left(1, X_s(1,1), X_s(1,2)\right)\cdot d1$

$u2 := N\left(2, X_s(2,1), X_s(2,2)\right)\cdot d2$

$$u1 = \begin{pmatrix} -5.283 \times 10^{-7} \\ -3.472 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$u2 = \begin{pmatrix} 5.023 \times 10^{-7} \\ -7.569 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$