



## Obliczenia DRGAŃ WŁASNYCH programem ROBOT - instrukcja

Drgania swobodne to drgania układu, na który nie działają zewnętrzne siły (choć zwykle są ich przyczyną). Drgania okresowe - drgania o stałym (powtarzalnym) cyklu. Ponieważ wszystkie drgania są złożeniem drgań harmonicznym (tzw. szereg Fouriera) szczególne znaczenie mają „elementarne drgania harmoniczne” (opisane wzorem  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , gdzie  $\omega$  - częstość kątowa,  $\varphi$  - faza początkowa). W mechanice konstrukcji nazywamy je **drzganiami własnymi** (choć często utożsamia się je z drzganiami swobodnymi). Ich formy (postaci) oraz pulsacje, są podstawowymi parametrami używanymi w analizie dynamicznej konstrukcji.

Poniższe parametry dynamiczne są sobie równoważne i połączone następującymi zależnościami:

- okres  $T$  - najkrótszy czas po którym deformacje układu się powtarzają (długość cyklu);
- pulsacja  $\omega$  -  $\omega = 2\pi / T$  (częstość kątowa, inaczej kołowa);
- częstotliwość  $f$  -  $f = 1 / T$ , odwrotność okresu, liczba cykli w jednostce czasu (sekundzie) [Hz].

Cechy dynamiczne (parametry drgań własnych) dla danej konstrukcji zależą od rozkładu mas. Utworzony w programie ROBOT dowolny model konstrukcji wystarczy uzupełnić informacjami o lokalizacji i wielkości mas, a możliwe będzie wyznaczenie postaci drgań własnych oraz ich okresów (pulsacji/częstotliwości).

Przy obliczaniu drgań własnych należy pamiętać że:

1. Liczba postaci drgań jest równa liczbie dynamicznych stopni swobody;
2. Postacie drgań określają jedynie proporcje pomiędzy poszczególnymi (statycznymi) st. swobody;
3. Częstości drgań są dodatnie;
4. Częstości i fazy ruchu dla wszystkich punktów konstrukcji są wspólne (różne są tylko amplitudy).

**Przykład 1:** drgania własne nieważkiej, swobodnie podpartej belki, z masą skupioną „m” w środku rozpiętości

$$\omega^2 = 48EJ / (mL^3)$$

Dwumetrowa belka stalowa, wykonana ze stali „S 450”, o profilu dwuteownika europejskiego IPE200 i obu końcach swobodnie podpartych służy jako podpora do przymocowanego do niej w połowie rozpiętości urządzenia o masie 1200 kg. Wyznacz parametry drgań własnych tego układu.

Dane:  $E = 210$  [GPa] =  $210e9$  [Pa],  
 $I_y = 1943,17$  [cm<sup>2</sup>] =  $19,4317e-6$  [m<sup>4</sup>],  
 $m = 1200$  [kg] =  $1,2e3$  [kg],  
 $L = 2$  [m] =  $2$  [m].

Wynik:  $\omega = (48 * 210e9 * 19,4317e-6 / (1200 * 2^3))^{0,5} = 142,840$  [rd/s]  
 $T = 0,043988$  [s]

### Obliczenia w Robocie

Po uruchomieniu programu wybieramy typ konstrukcji: *Projektowanie ramy płaskiej* (jeżeli wśród dostępnych ikon brak ramy 2D – otwieramy pełne okno wyboru opcją „Nowy”)

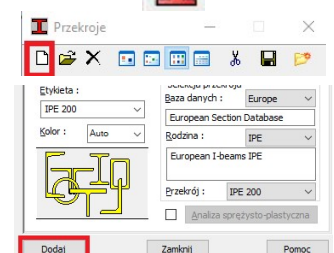
Sprawdzamy (jeżeli trzeba – zmieniamy) preferencje: (*Narzędzia/Preferencje* – parametry regionalne: Eurocode, oba języki: j.polski) oraz preferencje zadania: (*Narzędzie/Preferencje zadania* – materiały: Eurocode), akceptując zmiany przez „OK”.

Wybieramy z pionowego paska ikonę „Profile prętów”.

W otwartym dialogu (*Przekroje*) wybieramy nowy profil.

W dialogu *Nowy przekrój* ustawiamy *Typ profilu*: „Stalowy”, *Materiał*: „S 450”, *Baza danych*: „Europe”, *Rodzina*: „IPE”, *Przekrój*: „IPE 200”.

Dolnym przyciskiem „Dodaj” akceptujemy utworzenie profilu (jeżeli już istnieje - zatwierdzamy jego modyfikację).



Przystępujemy do definicji modelu. Wybieramy z pionowego paska ikonę „Pręty” (sprawdzamy *Typ pręta* – Belka lub Pręt, oraz *Przekrój*: „IPE 200”) aktywujemy włącznik *Ciągnięcie* i klikamy krzyżem myszki w punkty: (0; 0), (1; 0), (2; 0) jeśli trzeba powiększając nieco obraz kółkiem myszki. (*współrzędne początku i końca można wpisywać też wprost w pola dialogu stosując jako separator odstęp, lub średnik - myszka powinna być umieszczona w obrębie dialogu, żeby nie „pobierać danych” z ekranu*).

Wybieramy z pionowego paska ikonę „Podpory” i po sprawdzeniu czy podpora *Pinned* ma zablokowane oba przesuwne stopnie swobody (jeżeli jej nie ma trzeba ją utworzyć/dodać) i po zamknięciu dialogu *Definicji* kliknąć kursorem, którego kształt pokazuje teraz odebrane stopnie swobody, w skrajne węzły wprowadzając tam podpory nieprzesuwne.

Model belki został utworzony, pozostaje zdefiniować cechy dynamiczne.

Z menu *Analiza* wybieramy opcję *Rodzaje analizy* (można też z poziomego paska wybrać ikonę „Parametry analizy konstrukcji”) i w otwartym dialogu przyciskamy *Nowy*, zatwierdzając przez *OK* utworzenie przypadku analizy modalnej.

Automatycznie otwiera się okno parametrów, w którym zmieniamy liczbę postaci do 2 - zadanie ma tylko **2 dynamiczne st. swobody (!)**. Aby nie uwzględniać masy własnej belki musimy zaznaczyć „Pomiń gęstość”. Chwilowo można poprzestać tylko na tych zmianach – *OK*.

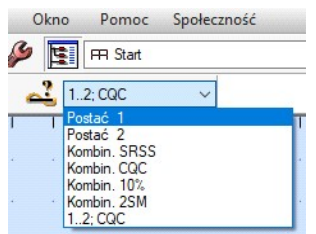
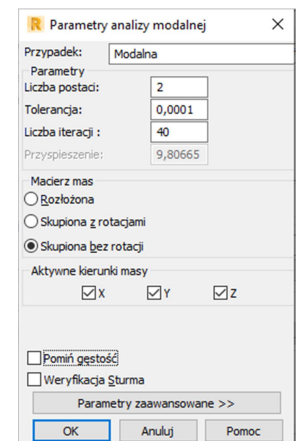
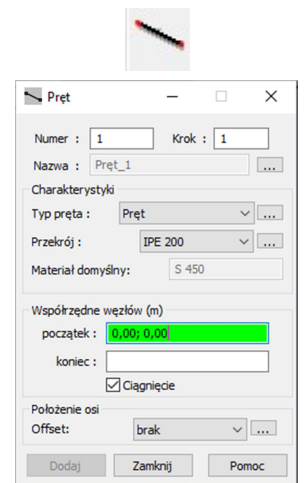
Po zamknięciu dialogu, wybieramy *Definicję obciążeń* (menu *Obciążenia*, albo prawy pasek narzędziowy). Jeżeli dialog pokazuje wyszarzone ikony (bez informacji o przypadku obciążenia) trzeba w drugim rzędzie górnego paska ikon rozwinąć i wskazać (jeszcze raz) przypadek: „1:Modalna”. Po wyborze zakładki „Ciężar i masa” wybieramy ikonę mas „węzłowych” i na kierunkach X i Z wpisujemy 1200 (jako ciężar KG). **ODZNACZAMY** zastosowanie do wszystkich przypadków (możemy liczyć kolejne, z innymi rozkładami mas) i po wciśnięciu „Dodaj” klikamy kursorem z symbolem mas w środkowy węzeł (nr 2).

Uruchamiamy *Obliczenia* (menu *Analiza*, albo ikona kalkulatora).

Menu *Rezultaty/Zaawansowane/Drgania własne...* wyświetla informację o poszczególnych postaciach drgań własnych (tutaj – dwóch). Menu kontekstowe (prawy klawisz) pozwala wybrać różne informacje włączając w to postacie wektorów drgań własnych z opcją normalizacji.

Menu *Rezultaty/Wykresy na prętach* w zakładce *Deformacje* wyświetla zdeformowaną konstrukcję przez zaznaczenie deformacji i „Zastosuj” (żądaną postać drgań trzeba wybrać w poziomym pasku narzędzi).

- Dialog pozwala też zaprezentować prostą animację drgań (otwierane jest osobne okienko z przyciskami „odtworacza”).
- Wartości zadanych mas można sprawdzać w *Obciążenia/Tabela mas*.
- Precyzja wyświetlanych „parametrów” – *Jednostki/Inne/Wielkości bezwymiarowe* (w *Preferencjach zadania*, lub po kliknięciu w jednostki w prawym, dolnym rogu ekranu).
- Pierwsza częstość kołowa,  $\omega = 142,840$  (zgodna z rozw. analit.) odpowiada drganiom poprzecznym, druga – 998,47 – podłużnym. Zmiana podpory na przesuwną zmniejsza częstość  $\sqrt{2}$  raza ( $\omega = 706$ )



**Przykład 2:** drgania własne belki o masie ciągłej „ $\rho$ ”, swobodnie podpartej na obu końcach

$$\omega_n = n^2 \left( \pi^2 / L^2 \sqrt{EJ / \rho} \right)$$

Wykorzystując poprzedni model możemy policzyć drgania własne belki (bez dodatkowej masy). Rozwiązanie analityczne podane powyżej wymaga wyznaczenia masy „liniowej”. Przyjmowany w Robocie ciężar 77,01 kN/m<sup>3</sup> odpowiada masie 7852,8 kg/m<sup>3</sup>. Ponieważ pole przekroju IPE200 wynosi 28,484 cm<sup>2</sup>, masa liniowa dwuteownika wyniesie  $\rho = 22,368$  kg/m.

Pozwala to obliczyć częstość  $\omega = \pi^2 / 2^2 * (210e9 * 19,4317e-6 / 22,368)^{0,5} = 1053,9$  rd/sek. (kolejne częstości, to: 4216, 9485, 16862).

### Obliczenia w Robocie

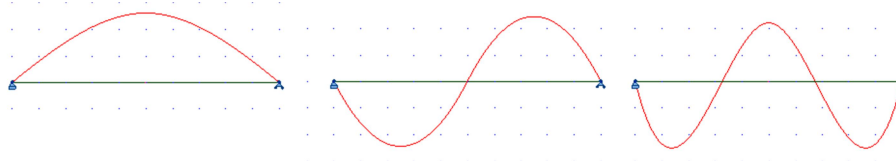
Wprowadźmy kolejny (drugi) przypadek, naciskając w dialogu *Opcji obliczeniowych* przycisk Nowy i akceptując utworzenie nowego przypadku analizy modalnej (dla uniknięcia nieporozumień zmieniając jej nazwę na „Masa własna”).

Przyjmijmy obliczenia 5 postaci drgań, wykorzystując macierz mas obliczanych dla masy rozłożonej<sup>#</sup> BEZ uwzględniania przesuwów wzdłuż X i Y (aby wykluczyć drgania podłużne).

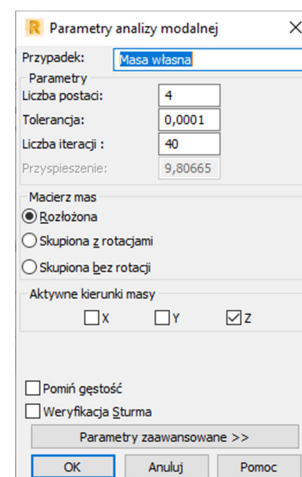
<sup>(#)</sup> dostępne opcje macierzy mas pozwalają uprościć zagadnienie obliczania wartości własnej przez przyjęcie macierzy przekątniowej (uwzględniając wszystkie, albo tylko przesuwne stopnie swobody).

Uruchomienie obliczeń sygnalizuje błąd liczby dynamicznych stopni swobody (obroty i przemieszczenia w kierunku Z dla 3 węzłów z podporami dają tylko 4 stopnie swobody). Akceptujemy zmniejszenie ich liczby do 4 i otrzymujemy zestaw pulsacji (podstawowa: 1049,2).

Obraz postaci drgań pokazuje krzywe zbliżone do sinusoidy (deformacje belki opisane są wielomianowymi funkcjami kształtu) o zwiększającej się liczbie półfal (pierwsze trzy pokazuje rysunek poniżej).



Przyjęcie 10 elementów skończonych (podział belek na 5 części – zaznaczenie obu elementów i wywołanie opcji *Edycja/Podział* z wpisaniem liczby podziału 5 i zatwierdzeniem) daje dla pierwszej częstości własnej przemieszczenia praktycznie pokrywające się z sinusoidą.



Postać drgań dla 1 war.własnej	
Wektor wł.	Funkcja sin()
0	0,000
0,309	0,309
0,587	0,588
0,808	0,809
0,950	0,951
1	1,000

Pulsacje kolejnych drgań własnych				
analitycznie	2 ES	Błąd	10 ES	Błąd
1 054	1 049	0,5%	1 045	0,8%
4 216	4 527	7,4%	4 081	3,2%
9 486	10 916	15,1%	8 844	6,8%
16 863	18 904	12,1%	14 991	11,1%