



Metody Obliczeniowe: ćwiczenie 1

Dokonać interpolacji wybranej funkcji jednej zmiennej funkcjami kształtu stopnia 1 oraz 2. Obliczyć normy błędu interpolacji.

Wskazówki:

1. Niech interpolowana funkcja będzie dana wzorem $f(x) = \cos(4x)e^{-x}$, $x \in [0, 3]$
2. Przyjmijmy, że element 1 jest odcinkiem $[0, 1]$
3. Interpolacja Lagrange'a pierwszego stopnia w elemencie 1: $u_h(x) = f(0)\varphi_1(x) + f(1)\varphi_2(x)$, gdzie $f(0) = 1$, $f(1) = -0.2405$ - stopnie swobody
 $\varphi_1(x) = \frac{x-1}{0-1} = 1-x$, $\varphi_2(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$ - liniowe funkcje kształtu Lagrange'a
4. Błąd interpolacji: $e(x) = f(x) - u_h(x)$
5. Norma błędu: $\|e\| = \sqrt{\int_0^1 e^2 dx}$
6. Błąd względny: $\frac{\|e\|}{\|f\|} \approx 90\%$
7. Interpolacja stopnia 2. Można albo wprowadzić trzeci węzeł np. w punkcie $x=0.5$ i zastosować 3 funkcje Lagrange'a stopnia 2, albo poprzednią interpolację liniową wzbogacić funkcją stopnia 2, t.zw. "bubble", przyjmującą wartości zerowe w dotychczasowych węzłach $x = 0$, $x = 1$
8. Zastosujmy to drugie podejście. Niech $\varphi_3(x) = x(x-1)$. Interpolant kwadratowy będzie postaci $u_{hp} = u_h + \alpha\varphi_3(x)$
9. Dodatkowy stopień swobody α można tak dobrać aby zminimalizować błąd interpolacji, czyli $\|f - u_h - \alpha\varphi_3\|^2 \rightarrow \min \Rightarrow \alpha \int_0^1 \varphi_3 \varphi_3 dx = \int_0^1 \varphi_3 (f - u_h) dx$. Stąd $\alpha = 2.315$ i błąd wzgl. ok. 22% albo z warunku: $u_{hp}(x_0) = f(x_0)$, gdzie x_0 jest środkiem elementu.
10. Wnioski:
 - poprawa dokładności aproksymacji odbywa się przez zmniejszenie wymiaru elementu (h) albo podniesienie stopnia funkcji kształtu (p)
 - stopnie swobody mogą być wartościami przybliżanej funkcji, tu $f(0)$, $f(1)$
 - dobre własności aproksymacyjne mają zbiory funkcji kształtu wśród których są takie, których suma jest funkcją stałą (tu $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, więc zastosowane aproksymacje stopnia 1 i 2 mają tę własność). W ogólności, baza utworzona przez funkcje kształtu ma być kompletna, czyli umożliwiać uzyskanie wielomianu każdego stopnia od 0 do najwyższego.