

# Technologia MES

## Zagadnienie statyki kratownicy płaskiej

METODY OBLICZENIOWE  
Budownictwo, studia I stopnia, semestr 6

Instytut L-5, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska

EWA PABISEK

## 1 równanie równowagi elementu skończonego

$$\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{z}^e + \mathbf{f}^e.$$

## 2 gdzie występują następujące macierze i wektory ES

- **Macierz sztywności liniowej**

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx^e,$$

- **Wektor węzłowych sił zastępujących obciążenie  $p(x)$**

$$\mathbf{z}^e = \int_0^{l^e} \mathbf{N}^T p(x) \, dx^e.$$

# Równanie równowagi układu

Macierzowe równanie równowagi statycznej całego układu ma postać:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{P} + \mathbf{Z} + \mathbf{R}$$

gdzie:

$\mathbf{K}$  - globalna macierz sztywności układu.

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e$$

$\mathbf{T}$  – macierz transformacji z układu lokalnego ES do globalnego układu

$\mathbf{Q}$  – wektor globalnych przemieszczeń układu,

$\mathbf{P}$  – wektor zewnętrznych obciążeń węzłowych

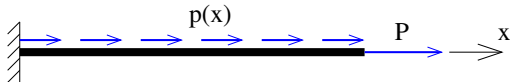
$\mathbf{Z}$  – wektor globalnych sił zastępujących obciążenie ES

$$\mathbf{Z} = \sum_e \mathbf{Z}^e, \quad \mathbf{Z}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{z}^e,$$

$\mathbf{R}$  – wektor globalnych reakcji podpór

# Opis elementu kratowego

## Definicje zmiennych



- Przeszyczenie, odkształcenie i siła przekrojowa w pręcie rozciągany/ściskany

$$\mathbf{u}(x) = \{u(x)\}$$

$$\mathbf{e}(x) = \{\varepsilon_0\}$$

$$\mathbf{s}(x) = \{N(x)\}$$

$$\mathbf{p} = \{p(x)\}$$

- Związki kinematyczne i fizyczne:

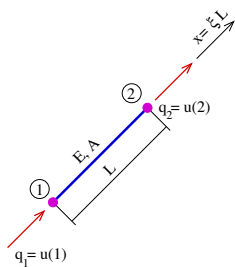
$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx} \Rightarrow \mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \mathbf{L} = \left[ \frac{d}{dx} \right]$$

$$N = EA \varepsilon_0 \Rightarrow \mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e}, \quad \mathbf{D} = [EA]$$

# Opis elementu kratowego w układzie lokalnym

## Aproksymacja pola przemieszczeń

- Liczba lokalnych stopni swobody węzła ES  $lss_w = 1, lss^e = 2$ .



- wektor przemieszczeń węzła ES:

$$\mathbf{q}_w = [u_w] \\ (1 \times 1)$$

- wektor przemieszczeń ES:

$$\mathbf{q}^e = [q_1, q_2]^T = [u_1, u_2]^T \\ (2 \times 1)$$

- aproksymacja pola przemieszczeń:

$$\mathbf{u}^e(\xi) = [u_x(\xi)] = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{q}^e = [(N_1(\xi), N_2(\xi))]^e \begin{bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{bmatrix}, \\ (1 \times 1)$$

$\xi^e = x/l^e$  – bezwymiarowa współrzędna

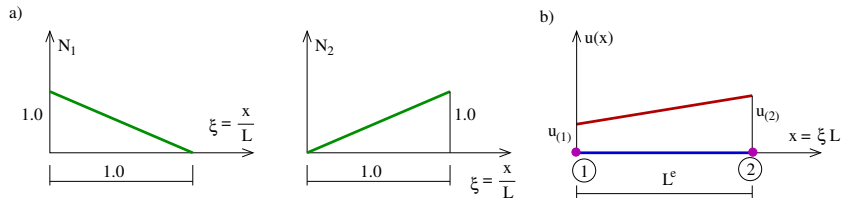
$N_1(\xi), N_2(\xi)$  – funkcje kształtu

# Opis elementu kratowego w układzie lokalnym

## Aproksymacja pola przemieszczeń

- funkcje kształtu:

$$\mathbf{N}_{(1 \times 2)}(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi)] = [(1 - \xi), \xi]$$



# Opis elementu kratowego w układzie lokalnym

Związki kinematyczne i fizyczne

- Aproksymacja pola uogólnionych odkształceń:

$$\mathbf{e}_{(1 \times 1)}(\xi) = [\varepsilon_x(\xi)] = \frac{du}{Ld\xi} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}(\xi) \mathbf{q}^e = \mathbf{B}_{(1 \times 2)}(\xi) \mathbf{q}_{(2 \times 1)}^e$$

- Aproksymacja pola uogólnionych naprężeń:

$$\mathbf{s}_{(1 \times 1)}(\xi) = N(\xi) = \mathbf{D} \mathbf{e}(\xi) = \mathbf{D}_{(1 \times 1)} \mathbf{B}_{(1 \times 2)}(\xi) \mathbf{q}_{(2 \times 1)}^e$$

gdzie:

$$\mathbf{B}_{(1 \times 2)}(\xi) = \mathbf{L} \mathbf{N}_{(1 \times 2)} = \left[ \frac{-1}{L^e}, \frac{1}{L^e} \right], \quad \mathbf{D}_{(1 \times 1)} = \left[ E A \right]^e$$

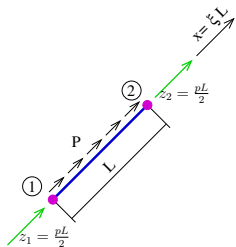
# Opis elementu kratowego w układzie lokalnym

Macierze ES w układzie lokalnym

- Macierz sztywności ES w układzie lokalnym

$$\mathbf{k}^e_{(2 \times 2)} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \quad \longrightarrow \quad \mathbf{k}^e_{(2 \times 2)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Wektor węzłowych sił zastępujących obciążenie  $p(x) = p = const$



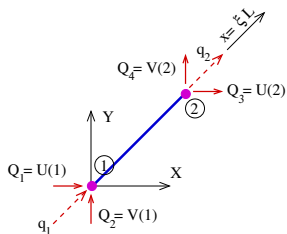
$$\mathbf{z}^e_{(2 \times 1)} = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx \quad \longrightarrow \quad \mathbf{z}^e_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} \frac{pL}{2} \\ \frac{pL}{2} \end{bmatrix}$$



# Opis ES kratowego w układzie globalnym

CD aproksymacji

- Liczba globalnych stopni swobody węzła  $LSS_w = 2$  a elementu  $LSS^e = 4$



wektor przemieszczeń węzła:

$$\mathbf{Q}_w = [U_w, V_w]^T$$

(2×1)

wektor przemieszczeń ES:

$$\mathbf{Q}^e = [Q_1, Q_2 | Q_3, Q_4]^T = [U_1, V_1 | U_2, V_2]^T$$

(4×1)

$$\mathbf{q}_w = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{Q}^e$$

(2×1) (2×4) (4×1)

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{q}_w$$

(4×1) (4×2) (2×1)

gdzie:  $\mathbf{T}$  – macierz transformacji  
 $c = \cos(\alpha^e)$ ,  $s = \sin(\alpha^e)$

# Opis elementu kratowego

Macierze ES w układzie globalnym

- **Macierz sztywności ES w układzie globalnym**

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e, \quad \begin{matrix} (4 \times 4) & & (4 \times 2) & (2 \times 2) & (2 \times 4) \end{matrix},$$
$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

- **Ostatecznie macierz sztywności ES w układzie globalnym:**

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA^e}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ \hline -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{array} \right]^e, \quad \begin{matrix} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha. \end{matrix}$$

- **Wektor sił zastępujących obciążenie równomiernie rozłożone w układzie globalnym**

$$\mathbf{Z}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{z}^e = \begin{bmatrix} z_1^e c \\ z_1^e s \\ z_2^e c \\ z_2^e s \end{bmatrix}$$

# MES dla ustrojów prętowych (statyka)

## Algorytm metody

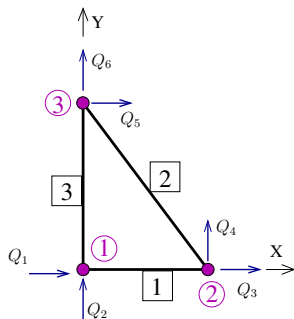
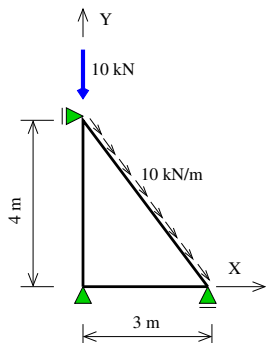
- 1 Dyskretyzacja (numeracja węzłów i elementów, topologia).
- 2 Obliczenie macierzy sztywności  $\mathbf{k}^e$  oraz wektora sił zastępujących obciążenie rozłożone  $\mathbf{z}^e$  w układzie lokalnym elementu.
- 3 Transformacja macierzy do układu globalnego - obliczenie  $\mathbf{K}^e$  oraz  $\mathbf{Z}^e$ .
- 4 Agregacja: zbudowanie macierzy sztywności układu  $\mathbf{K}$  oraz wektora  $\mathbf{Z}$ .
- 5 Utworzenie wektora sił skupionych w węzłach  $\mathbf{P}$ .
- 6 Uwzględnienie warunków brzegowych.
- 7 Rozwiązanie układu równań  $\mathbf{KQ} = \mathbf{P} + \mathbf{Z} + \mathbf{R}$  czyli wyznaczenie wektora globalnych przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{Q}$  i reakcji w więzach podporowych  $\mathbf{R}$ .
- 8 Powrót do elementu i obliczenie sił przywęzłowych w układzie lokalnym elementu.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{Q}^e \longrightarrow \mathbf{q}^e \longrightarrow \mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{z}^e \\ \text{lub } \mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{Q}^e \longrightarrow \mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e - \mathbf{Z}^e \longrightarrow \mathbf{f}^e \end{aligned}$$

- 9 sprawdzenie obliczeń (równowagi układu, wybranego podukładu, węzła).

# Statyka kratownicy

## Przykład 1: Dane, dyskretyzacja, topologia



NE	wP	wK
1	①—②	
2	②—③	
3	①—③	

Liczba węzłów ( $LW = 3$ ), liczba elementów ( $LE = 3$ )

Liczba stopni swobody węzła ( $LSSW = 2$ )

Liczba stopni swobody układu ( $LSSU = 6$ ).

Dla  $E = 10\text{GPa}$ ,  $A = 0.001\text{m}^2$ ,  $l^1 = 3\text{m}$ ,  $l^2 = 5\text{m}$ ,  $l^3 = 4\text{m}$

Wektor przemieszczeń węzłowych w układzie globalnym:

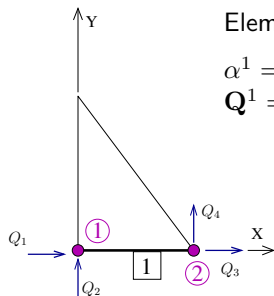
$$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6]^T = [U_1, V_1 \mid U_2, V_2 \mid U_3, V_3]^T$$

# Statyka kratownicy

Przykład 1: Macierze sztywności  $\mathbf{k}^e \rightarrow \mathbf{K}^e$

- Macierze sztywności ES w układzie globalnym  $\mathbf{K}^e$  dla  $e = 1, 2, 3$

$$\mathbf{K}_{(4 \times 4)}^e = \frac{EA}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ \hline -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} c = \cos(\alpha) \\ s = \sin(\alpha) \end{array}$$



Element  $e = 1$  :

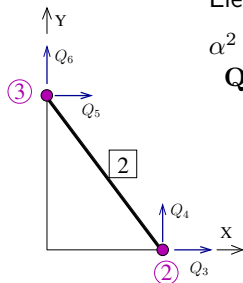
$\alpha^1 = 0^\circ$ ,  $\cos(\alpha^1) = 1.0$ ,  $\sin(\alpha^1) = 0.0$ ,  $L^1 = 3.0$  m

$\mathbf{Q}^1 = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4]^T$

$$\mathbf{K}^1 = \left[ \begin{array}{cc|cc} 3.333 \cdot 10^3 & 0 & -3.333 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3.333 \cdot 10^3 & 0 & 3.333 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

# Statyka kratownicy

Przykład 1: Macierze sztywności  $\mathbf{k}^e \rightarrow \mathbf{K}^e$

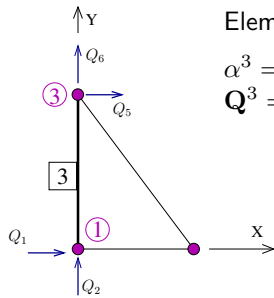


Element  $e = 2$ :  $c = (x_k^2 - x_p^2)/l^e$ ,  $s = (y_k^2 - y_p^2)/l^e$

$\alpha^2 = 126.87$ ,  $\cos(\alpha^2) = -0.6$ ,  $\sin(\alpha^2) = 0.8$ ,  $L^2 = 5.0 \text{ m}$

$\mathbf{Q}^2 = [Q_3, Q_4, Q_5, Q_6]^T$

$$\mathbf{K}^2 = \left[ \begin{array}{cc|cc} 720 & -960 & -720 & 960 \\ -960 & 1.28 \cdot 10^3 & 960 & 1.28 \cdot 10^3 \\ \hline -720 & 960 & 720 & -960 \\ 960 & -1.28 \cdot 10^3 & -960 & 1.28 \cdot 10^3 \end{array} \right]$$



Element  $e = 3$ :

$\alpha^3 = 90$ ,  $\cos(\alpha^3) = 0.0$ ,  $\sin(\alpha^3) = 1.0$ ,  $L^3 = 4.0 \text{ m}$

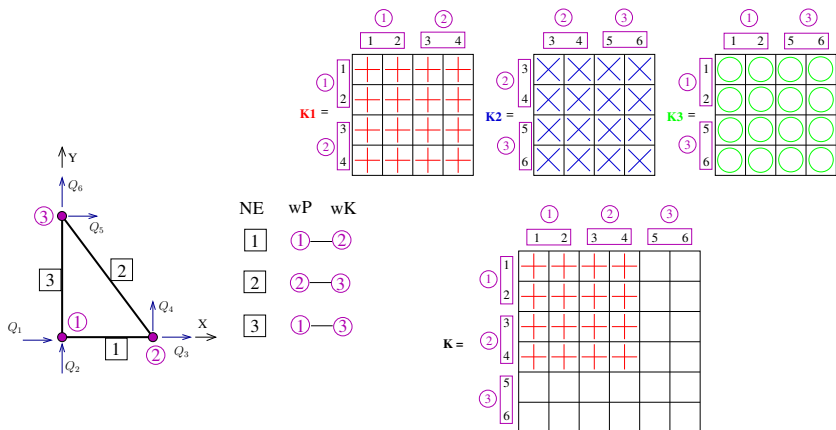
$\mathbf{Q}^3 = [Q_1, Q_2, Q_5, Q_6]^T$

$$\mathbf{K}^3 = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 \cdot 10^3 & 0 & 2.5 \cdot 10^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 \cdot 10^3 & 0 & 2.5 \cdot 10^3 \end{array} \right]$$

# Statyka kratownicy

## Przykład 1: Agregacja

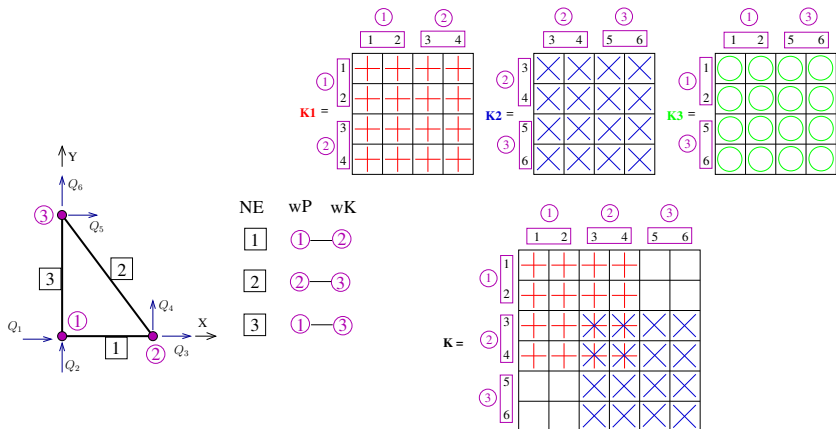
Globalna macierz sztywności  $\mathbf{K}$  całego układu kratowego:



# Statyka kratownicy

## Przykład 1: Agregacja

Globalna macierz sztywności  $\mathbf{K}$  całego układu kratowego:

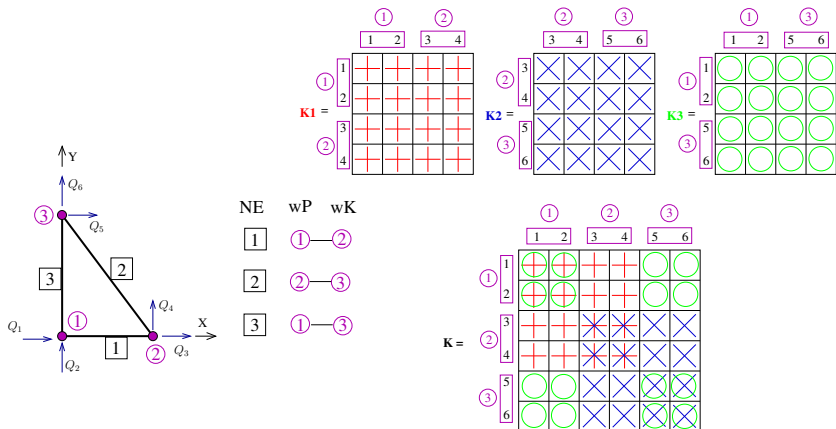




# Statyka kratownicy

## Przykład 1: Agregacja

Globalna macierz sztywności  $\mathbf{K}$  całego układu kratowego:

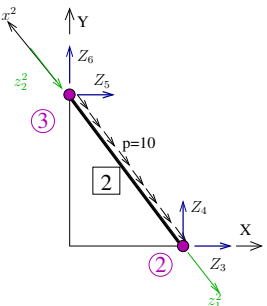


# Statyka kratownicy

- Globalna macierz sztywności  $\mathbf{K}$  całego układu kratowego:

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 3.333 & 0 & -3.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ -3.333 & 0 & 4.053 & -0.96 & -0.72 & 0.96 \\ 0 & 0 & -0.96 & 1.28 & 0.96 & -1.28 \\ 0 & 0 & -0.72 & 0.96 & 0.72 & -0.96 \\ 0 & -2.5 & 0.96 & -1.28 & -0.96 & 3.78 \end{bmatrix} .$$

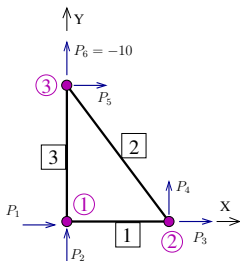
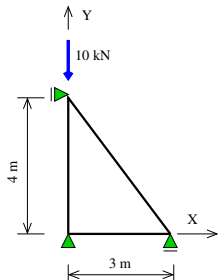
- Wektor węzłowych sił zastępczych  $\mathbf{Z}$



$$\mathbf{z}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{pL^2}{2} \\ -\frac{pL^2}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{Z}^2 = \mathbf{T}^{2T} \mathbf{z}^2 = \begin{bmatrix} 15 \\ -20 \\ 15 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Globalny wektor węzłowych sił zastępczych  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ -20 \\ 15 \\ -20 \end{bmatrix}$  (18)

- Wektor obciążeń węzłowych  $\mathbf{P}$



$$\mathbf{P} = [ 0, 0, 0, 0, 0, -10 ]$$

# Statyka kratownicy

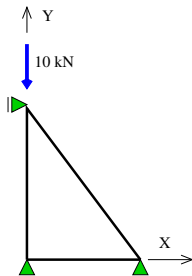
- Układ równań MES:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{P} + \mathbf{Z} + \mathbf{R}$$

- Niewiadome:

$$\mathbf{Q} = \{0, 0, Q_3, 0, 0, Q_6\}$$

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, 0, R_4, R_5, 0\}$$



**K**

**Q**

**P + Z + R**

$$10^3 \begin{bmatrix} 3.333 & 0 & -3.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ -3.333 & 0 & 4.053 & -0.96 & -0.72 & 0.96 \\ 0 & 0 & -0.96 & 1.28 & 0.96 & -1.28 \\ 0 & 0 & -0.72 & 0.96 & 0.72 & -0.96 \\ 0 & -2.5 & 0.96 & -1.28 & -0.96 & 3.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + R_1 \\ 0 + R_2 \\ 15 + 0 \\ -20 + R_4 \\ 15 + R_5 \\ -30 + 0 \end{bmatrix}$$

# Statyka kratownicy

- Po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$Q_1 = 0.0, \quad Q_2 = 0.0, \quad Q_4 = 0.0, \quad Q_5 = 0.0$$

$$10^3 \begin{bmatrix} 3.333 & 0 & -3.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & -2.5 \\ -3.333 & 0 & \boxed{4.053} & -0.96 & -0.72 & \boxed{0.96} \\ 0 & 0 & -0.96 & 1.28 & 0.96 & -1.28 \\ 0 & 0 & -0.72 & 0.96 & 0.72 & -0.96 \\ 0 & -2.5 & \boxed{0.96} & -1.28 & -0.96 & \boxed{3.78} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + R_1 \\ 0 + R_2 \\ \boxed{15 + 0} \\ -20 + R_4 \\ 15 + R_5 \\ \boxed{-30 + 0} \end{bmatrix}$$

otrzymujemy układ:

$$10^3 \begin{bmatrix} 4.053 & 0.96 \\ 0.96 & 3.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -30 \end{bmatrix}$$

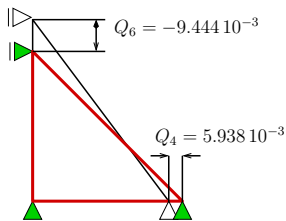
Po jego rozwiązaniu mamy:  $Q_3 = 5.938 \cdot 10^{-3} \text{m}$ ,  $Q_6 = -9.444 \cdot 10^{-3} \text{m}$

- Pełny wektor przemieszczeń:

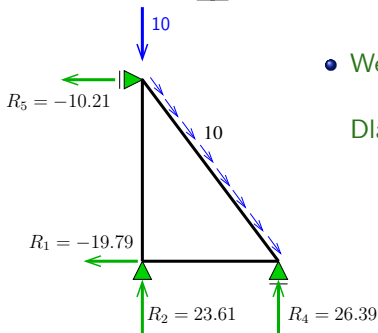
$$\mathbf{Q} = [0.0, 0.0 \mid 5.938 \cdot 10^{-3} \quad 0.0 \mid 0.0, -9.444 \cdot 10^{-3}]^T$$

# Statyka kratownicy

## Wyznaczenie niewiadomych



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 5.938 \cdot 10^{-3} \\ 0.0 \\ -9.444 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$



- Wektor reakcji oblicza się ze wzoru:

$$\mathbf{R} = \mathbf{KQ} - \mathbf{P} - \mathbf{Z}$$

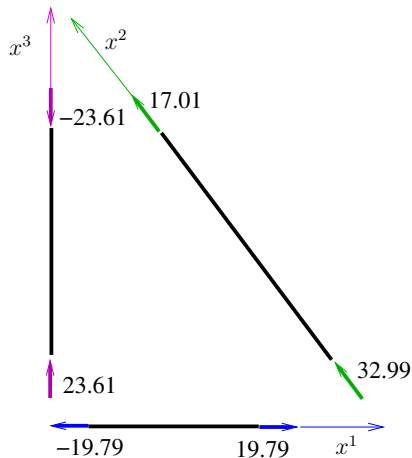
Dla analizowanej kratownicy reakcje wynoszą:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -19.79 \\ 23.61 \\ 0.0 \\ 26.39 \\ -10.21 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

# Statyka kratownicy

Powrót do elementu. Wyznaczenie sił przywęzłowych

Siły przywęzłowe  
w układach lokalnym ES



- Element 1

$$\mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^1 = \mathbf{T}^1(\mathbf{K}^1 \mathbf{Q}^1)$$
$$\mathbf{f}^1 = \begin{bmatrix} -19.79 \\ 19.79 \end{bmatrix}$$

- Element 2

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{T}^2(\mathbf{K}^2 \mathbf{Q}^2 - \mathbf{Z}^2)$$
$$\mathbf{f}^2 = \begin{bmatrix} 32.99 \\ 17.01 \end{bmatrix}$$

- Element 3

$$\mathbf{Q}^3 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^3 = \mathbf{T}^3(\mathbf{K}^3 \mathbf{Q}^3)$$
$$\mathbf{f}^3 = \begin{bmatrix} 23.61 \\ -23.61 \end{bmatrix}$$

**Dziękuję za uwagę**