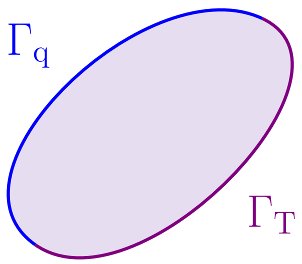
Problem stacjonarnego przepływu ciepła (Zagadnienie 2D)



1. Sformułowanie silne:

$$\nabla^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}\nabla T) + f = 0,$$

+ warunki brzegowe

$$q_n = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} = \hat{q} \qquad \text{na} \quad \Gamma_q \quad \text{(naturalne w.b.)}$$
$$T = \hat{T} \qquad \text{na} \quad \Gamma_T \quad \text{(podstawowe w.b.)}$$

gdzie:
$\mathbf{D} = [k_x,\ k_y]^{\mathrm{T}} -$ macierz przewodnictwa cieplnego
$q_n -$ gęstość strumienia przepływu ciepła (niewiadoma wtórna)
$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla T -$ strumień przepływu ciepła
$f -$ źródło ciepła

2. Sformułowanie słabe problemu ($h-$ grubość):

$$\int_A (\nabla w)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\, h\, \nabla T\, dA = -\int_\Gamma w\, q_n\, h\, d\Gamma + \int_A w\, f\, h\, dA,$$

+ warunek brzegowy

$T = \hat{T}$ na brzegu Γ_T.

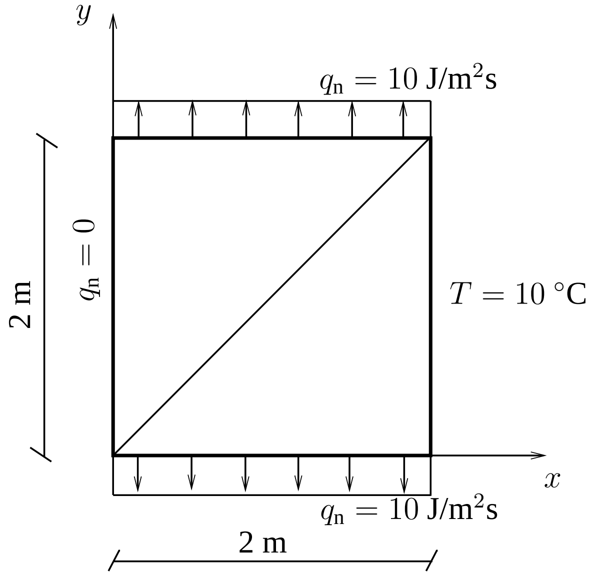
3. Równania MES

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_b$$

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\, \mathbf{B}\, dA, \quad \mathbf{F} = \int_A \mathbf{N}^{\mathrm{T}} f\, dA, \quad \mathbf{F}_b = -\int_\Gamma \mathbf{N}^{\mathrm{T}} q_n\, d\Gamma$$

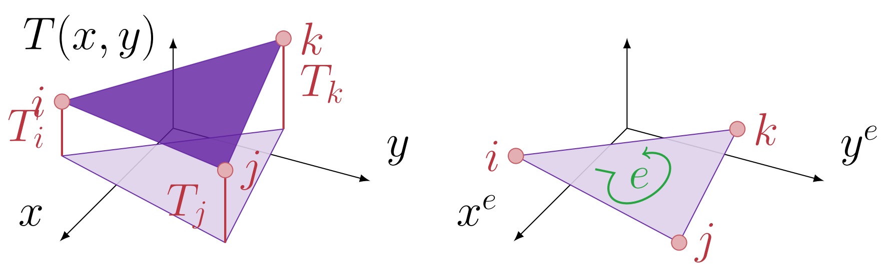
- $\boldsymbol{\Theta}-$ wektor węzłowych wartości temperatury,
- $\mathbf{N}-$ wektor funkcji kształtu,
- $\mathbf{B} = \nabla\mathbf{N}-$ macierz pochodnych funkcji kształtu,
- $T = \mathbf{N}\,\boldsymbol{\Theta}-$ aproksymowana funkcja temperatury,
- $\nabla T = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\Theta}-$ aproksymowana funkcja gradientu temperatury

3. Przykład:



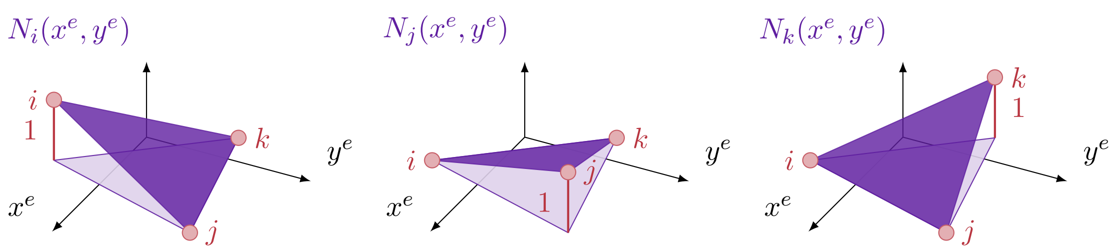
współczynnik przewodnictwa cieplnego $k = 4$ J/°Cms
intensywność źródła ciepła $f = 12$ J/m^{3}s, grubość $h = 1$ m.

- Funkcje kształtu dla elementu trójkątnego

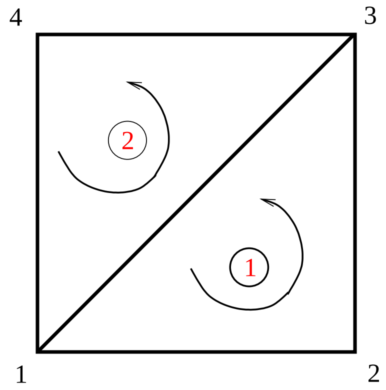


np. dla
$N_i(x^e, y^e)$

$$N_i(x_i^e, y_i^e) = 1$$
$$N_i(x_j^e, y_j^e) = 0$$
$$N_i(x_k^e, y_k^e) = 0$$



$$\mathbf{N}^e(x, y) = [N_i^e(x, y),\ N_j^e(x, y),\ N_k^e(x, y)]$$



- Wyznaczenie macierzy przewodności elementów $\mathbf{K}^{(e)}$

$$\underset{3\times 3}{\mathbf{K}}^{(e)} = k\,\underset{3\times 2}{\mathbf{B}}^{(e)\mathrm{T}}\underset{2\times 3}{\mathbf{B}}^{(e)}\,A^{(e)}, \qquad \underset{2\times 3}{\mathbf{B}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial N_i^{(e)}/\partial x & \partial N_j^{(e)}/\partial x & \partial N_k^{(e)}/\partial x \\ \partial N_i^{(e)}/\partial y & \partial N_j^{(e)}/\partial y & \partial N_k^{(e)}/\partial y \end{bmatrix}$$

$$\text{np.} \quad N_i^{(e)}(x,y) = a + b\,x + c\,y \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

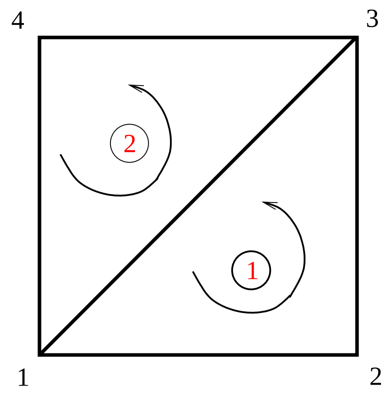
$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

Element e=1 $\quad A = 2, \quad k = 4 \quad$ (topologia: 1-2-3)

$$x_i = x_1 = 0, \quad x_j = x_2 = 2, \quad x_k = x_3 = 2,$$
$$y_i = y_1 = 0, \quad y_j = y_2 = 0, \quad y_k = y_3 = 2$$
$$N_i^{(1)}(x,y) = N_1^{(1)}(x,y) = 1 - 0.5x, \quad N_j^{(1)}(x,y) = N_2^{(1)}(x,y) = 0.5x - 0.5y,$$
$$N_k^{(1)}(x,y) = N_3^{(1)}(x,y) = 0.5y$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = 4 \cdot \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$



- Wyznaczenie macierzy przewodności elementów $\mathbf{K}^{(e)}$

$$\underset{3\times3}{\mathbf{K}}^{(e)} = k\,\underset{3\times2}{\mathbf{B}}^{(e)\mathrm{T}}\underset{2\times3}{\mathbf{B}}^{(e)}\,A^{(e)},\qquad \underset{2\times3}{\mathbf{B}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial N_i^{(e)}/\partial x & \partial N_j^{(e)}/\partial x & \partial N_k^{(e)}/\partial x \\ \partial N_i^{(e)}/\partial y & \partial N_j^{(e)}/\partial y & \partial N_k^{(e)}/\partial y \end{bmatrix}$$

$$\text{np.}\quad N_i^{(e)}(x,y) = a + b\,x + c\,y \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

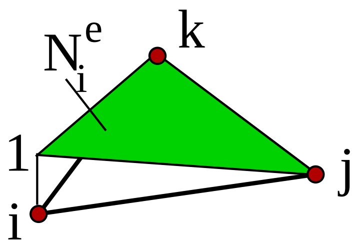
$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}}\begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

Element e=2 $\quad A = 2, \quad k = 4 \quad$ (topologia: 1-3-4)

$$x_i = x_1 = 0,\quad x_j = x_3 = 2,\quad x_k = x_4 = 0$$
$$y_i = y_1 = 0,\quad y_j = y_3 = 2,\quad y_k = y_4 = 2$$
$$N_i^{(2)}(x,y) = N_1^{(2)}(x,y) = 1 - 0.5y,\qquad N_j^{(2)}(x,y) = N_3^{(2)}(x,y) = 0.5x,$$
$$N_k^{(2)}(x,y) = N_4^{(2)}(x,y) = -0.5x + 0.5y$$

$$\mathbf{B}^{(2)} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

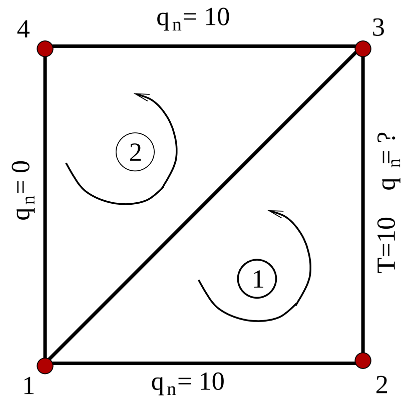
$$\mathbf{K}^{(2)} = 2\cdot\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot 2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$



- Wyznaczenie wektorów $\mathbf{f}^{(e)}$ (Wydajność ciepła)

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_A \mathbf{N}^{\mathrm{T}} f \, dA$$

$$\mathbf{f}^{e} = \frac{f}{3} A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{bo } \int_A N_i(x,y)\mathrm{d}A \text{ to objętość czworościanu}$$



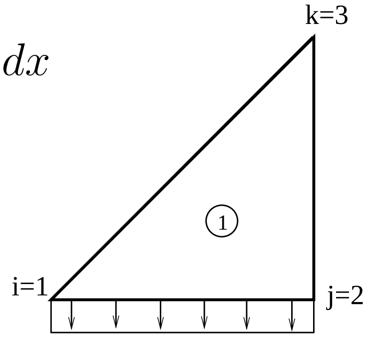
$$\mathbf{f}^{1} = \mathbf{f}^{2} = \frac{12}{3} \cdot 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Wyznaczenie wektorów $\mathbf{f}_b^{(e)}$
  $\mathbf{q}_{\mathrm{n}}$ znane na brzegach: $\Gamma_{12}, \ \Gamma_{34}, \ \Gamma_{14}$ nieznane na Γ_{23}
  oraz na krawędzi Γ_{13}, ale redukuje się podczas agregacji
  Element e=1

$$\mathbf{N}^{(1)} = [\, 1 - 0.5x, \ 0.5x - 0.5y, \ 0.5y \,]$$

$$\mathbf{f}_b^{(1)} = -\int_{\Gamma_{12}} \mathbf{N}^{(1)\mathrm{T}} q_{\mathrm{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{23}} \mathbf{N}^{(1)\mathrm{T}} q_{\mathrm{n}} \, d\Gamma - \underbrace{\int_{\Gamma_{31}} \mathbf{N}^{(1)\mathrm{T}} q_{\mathrm{n}} \, d\Gamma}_{redukcja}$$

$$= -\int_0^2 \mathbf{N}^{(1)\mathrm{T}}(x, y=0) \cdot 10 \, dx - \int_0^2 \mathbf{N}^{(1)\mathrm{T}}(x=2, y) \cdot q_{\mathrm{n}} \, dx$$

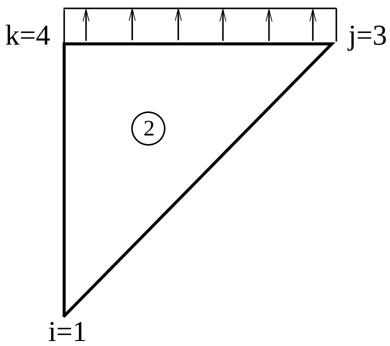


$$= -\int_0^2 \begin{bmatrix} 1 - 0.5x \\ 0.5x \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10 \, dx - \int_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - 0.5y \\ 0.5y \end{bmatrix} \cdot q_{\mathrm{n}} \, dy$$

$$= -\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ f_b^2 \\ f_b^3 \end{bmatrix}$$

Element e=2

$$\mathbf{N}^{(2)} = [\ 1 - 0.5y,\ 0.5x,\ -0.5x + 0.5y\ ]$$



$$\mathbf{f}_b^{(2)} = \underbrace{-\int\limits_{\Gamma_{13}} \mathbf{N}^{(2)\mathrm{T}} q_\mathrm{n}\, d\Gamma}_{redukcja} - \int\limits_{\Gamma_{34}} \mathbf{N}^{(2)\mathrm{T}} q_\mathrm{n}\, d\Gamma \underbrace{- \int\limits_{\Gamma_{41}} \mathbf{N}^{(2)\mathrm{T}} q_\mathrm{n}\, d\Gamma}_{w.b.\ q_\mathrm{n}=0}$$

$$= -\int\limits_0^2 \mathbf{N}^{(2)\mathrm{T}}(x, y=2)\ q_\mathrm{n}\ dx = -\int\limits_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5x \\ -0.5x+1 \end{bmatrix} \cdot 10\ dx = -\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Agregacja

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_b = -\begin{bmatrix} 10 \\ 10 + f_b^2 \\ 10 + f_b^3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Układ równań

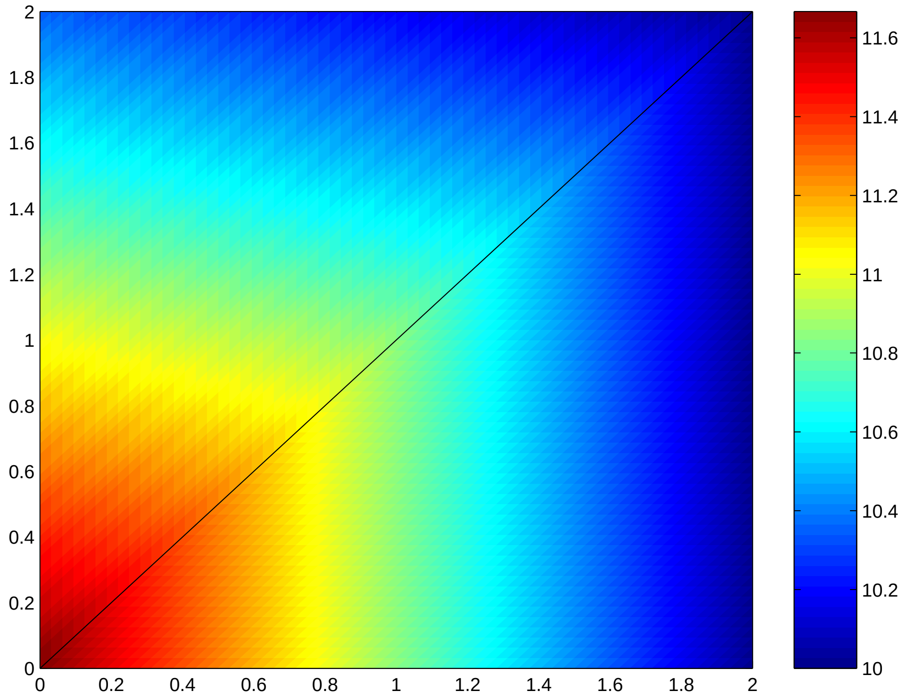
$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ 10 \\ 10 \\ \Theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 - f_b^2 \\ 6 - f_b^3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Niewiadome pierwotne -
temperatura w węzłach 1, 4 na brzegu izolowanym

$$T_1 = 11\frac{2}{3}\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_4 = 10\frac{1}{3}\,^\circ\mathrm{C},$$

Niewiadome wtórne - strumień ciepła na brzegu Γ_{23} w elemencie 1

$$f_b^2 = 1\frac{1}{3}\,\mathrm{J/m^2s}, \quad f_b^3 = 6\frac{2}{3}\,\mathrm{J/m^2s}$$



- Powrót do elementów -
  obliczenie wektorów przepływu ciepła w elementach

$$\mathbf{q}^{(e)} = -k\,\nabla T = -k\,\mathbf{B}^{(e)}\,\mathbf{\Theta}^{(e)} \tag{1}$$

Element e=1

$$\mathbf{q}^{(1)} = -4 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11\frac{2}{3} \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ J/m}^2\text{s}$$

Element e=2

$$\mathbf{q}^{(2)} = -4 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11\frac{2}{3} \\ 10 \\ 10\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 2\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ J/m}^2\text{s}$$

- Wyznaczenie temperatury w $P(x, y) = P(1,\ 0.4)$

$$T(x^e, y^e) = \mathbf{N}^{(e)}(x^e, y^e)\,\mathbf{\Theta}^{(e)}$$

$$\mathbf{N}^{(e=1)} = [\ 1 - 0.5x,\ 0.5x - 0.5y,\ 0.5y\ ]$$

$$\mathbf{\Theta}^{(e=1)} = [\ 11\frac{2}{3},\ 10,\ 10,\ ]^{\mathrm{T}}$$

$$T(1,\ 0.4) = [1 - 0.5 \cdot 1,\ 0.5 \cdot 1 - 0.5 \cdot 0.4,\ 0.5 \cdot 0.4] \begin{bmatrix} 11\frac{2}{3} \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 10\frac{5}{6}\,{}^{\circ}\mathrm{C}$$