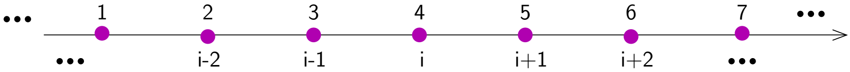
Centralne wzory różnicowe

dla zagadnienia jednowymiarowego



		i-2	i-1	i	i+1	i+2
f^{I}	$\frac{1}{2h}$		-1	0	1	
f^{II}	$\frac{1}{h^2}$		1	-2	1	
f^{III}	$\frac{1}{2h^3}$	-1	2	0	-2	1
f^{IV}	$\frac{1}{h^4}$	1	-4	6	-4	1

Problem zginania belki

Przemieszczeniowe równanie różniczkowe czwartego rzędu

- Zastosujemy MRS do rozwiązania problemu sformułowanego lokalnie np. za pomocą przemieszczeniowego równania różniczkowego czwartego rzędu opisującego zginanie belki prostej.

$$\frac{\mathrm{d}^4 v(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p_y(x)}{EJ} \ .$$

- Poszukiwaną "pierwotną" funkcją jest funkcja ugięcia belki $v(x)$.
- Funkcjami "wtórnymi" będą: moment zginający $M(x)$ oraz siła poprzeczna $T(x)$:

$$M(x) = -EJ\,\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} \ , \quad T(x) = -EJ\,\frac{\mathrm{d}^3 v(x)}{\mathrm{d}x^3} \ .$$

- Do równania różniczkowego należy dopisać odpowiednie warunki brzegowe, wynikające z brzegowych więzów kinematycznych oraz brzegowych obciążeń.

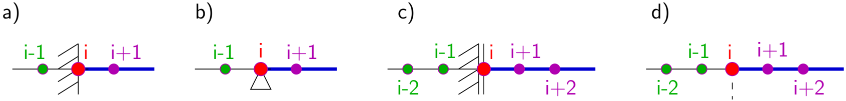
Jednowymiarowe zagadnienie brzegowe zginania belki
opisane równaniem różniczkowym czwartego rzędu, po zastosowaniu **centralnego ilorazu różnicowego** ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p_y(x)}{EJ} \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}}{h^4} = \frac{p_{y_i}}{EJ}$$

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = b_i, \quad b_i = h^4 \cdot \frac{p_{y_i}}{EJ}$$

Tworzy się układ równań, w którym należy uwzględnić jeszcze warunki brzegowe.

Warunki brzegowe w zapisie różnicowym



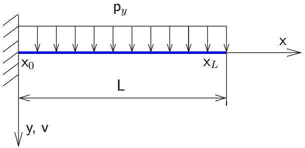
a) **Brzeg utwierdzony**: $v = 0\ ,\quad \frac{dv}{dx} = 0\ ,$
w zapisie różnicowym: $v_i = 0\ ,\quad \frac{-v_{i-1}+v_{i+1}}{2h} = 0\ .$

b) **Brzeg przegubowo podparty**: $v = 0\ ,\quad M = -EJ\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = 0\ ,$
w zapisie różnicowym: $v_i = 0\ ,\quad -EJ\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2} = 0\ .$

c) **Brzeg pionowo przesuwny**: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0\ ,\quad T = -EJ\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = 0,$
w zapisie różnicowym:
$$\frac{-v_{i-1}+v_{i+1}}{2h} = 0\ ,\quad -EJ\frac{-v_{i-2}+2v_{i-1}-2v_{i+1}+v_{i+2}}{2h^3} = 0.$$

d) **Brzeg swobodny**: $M = -EJ\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = 0\ ,\quad T = -EJ\frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = 0\ ,$
w zapisie różnicowym:
$$-EJ\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2} = 0,\quad -EJ\frac{-v_{i-2}+2v_{i-1}-2v_{i+1}+v_{i+2}}{2h^3} = 0.$$

Przykład belki wspornikowej



Równanie różnicowe musi być rozpisane dla punktów $i = 1, 2, 3, 4$:

$1 \cdot v_{i-2} - 4 \cdot v_{i-1} + 6 \cdot v_i - 4 \cdot v_{i+1} + 1 \cdot v_{i+2} = b$ gdzie $b = (h^4 p_y)/(EJ)$

Warunki brzegowe:

dla	$x = 0:$	$v = 0$	$v' = 0$
	i $= 0:$	$1 \cdot v_0 = 0$	$-1 \cdot v_{-1} + 1 \cdot v_1 = 0$
dla	$x = L:$	$M = 0$	$T = 0$
	i $= 4:$	$1 \cdot v_3 - 2 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 = 0$	$-1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 - 2 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 = 0$

Otrzymujemy **układ równań MRS**:

$$
\begin{array}{ll}
1. & 1 \cdot v_{-1} - 4 \cdot v_0 + 6 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = b \\
2. & 1 \cdot v_0 \quad - 4 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = b \\
3. & 1 \cdot v_1 \quad - 4 \cdot v_2 + 6 \cdot v_3 - 4 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 = b \\
4. & 1 \cdot v_2 \quad - 4 \cdot v_3 + 6 \cdot v_4 - 4 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 = b \\
\hline\hline
5. & \qquad 1 \cdot v_0 = 0 \\
6. & -1 \cdot v_{-1} + 1 \cdot v_1 = 0 \\
7. & \qquad 1 \cdot v_3 - 2 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 = 0 \\
8. & -1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 - 2 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 = 0
\end{array}
$$

Przykład belki wspornikowej

Postać macierzowa układu równań

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{B}$$

i=


i=	-1	0	1	2	3	4	5	6	V	B
1	1	-4	6	-4	1				v_{-1}	b
2		1	-4	6	-4	1			v_0	b
3			1	-4	6	-4	1		v_1	b
4				1	-4	6	-4	1	v_2	b
wb i=0		1							v_3	0
	-1		1						v_4	0
wb i=4					1	-2	1		v_5	0
				-1	2		-2	1	v_6	0

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{B}$$